

# 无限长土坡滑移变形模拟

谢州,周成\*,刘焦,曾子

( 四川大学 水利水电工程学院,水力学与山区河流保护国家重点实验室,四川 成都 610065)

**摘 要:** 从建立土体应力平衡微分方程入手,在平面应变的假定下求解均质无限长土坡的应力平衡方程。通过假定坡土的滑移速度和粘塑性应变率的关系式,以剑桥模型为依托,得出滑移变形速率的显式表达式,由此推出土坡滑动位移的计算式。因为模型计算值与实测值无论变形趋势还是大小都有不少误差,所以经修正粘滞性参数来改进模型的模拟精度。最后通过一个算例,将现场实测滑移数据和模型计算值进行比较,分析表明二者较为一致。

**关键词:** 土坡滑移;粘塑性应变率;粘滞性;解析解

**中图分类号:** P642 ,TU4

**文献标识码:** A

土体具有流变性,与其有关的现象是土的蠕变和应力松弛。蠕变是指应力状态不变的条件下,应变随时间逐渐增长的现象。在较低应力状态下,土的变形会逐渐趋于稳定;但当应力较大时,则变形会在相对稳定之后突然增加,最后达到蠕变破坏<sup>[1]</sup>。

边坡失稳与土体的流变性有关。天然土体的变形破坏大致表现为渐进式和突变式两大类。边坡的破坏滑移面往往是从一个薄弱区开始逐渐形成的,一般在滑移面的周围存在着潜在的由于结构扰动而逐渐扩大的剪切区<sup>[2]</sup>。根据 Mohr - Coulomb 理论,剪切面一般会在与最小主应力方向成  $45 + (\varphi/2)^\circ$  的倾斜面上发展。但是,由于多种因素的约束,往往是先形成一个剪切区,从此区发展渐进地形成潜在的滑移面。Terzaghi 在 20 世纪 30 年代提出土体渐进变形破坏的概念,用土体中的不均匀的应力和抗剪强度的重分布解释渐进破坏的过程<sup>[3]</sup>。土体的渐进变形破坏主要与硬粘土强度的逐步丧失有关,可以用沈珠江院士归纳的减压软化、剪胀软化和损伤软化 3 种机理来解释<sup>[4]</sup>。人们还选用一些非线性流变模型来分析天然土坡在自重作用下的滑移变

形,例如 Bingham - Norton 模型、Newton - Norton 模型和 Prandtl - Eyring 模型等<sup>[5]</sup>

本文首先通过建立无限长均质边坡的应力平衡微分方程,在对称和平面应变条件下给出其应力解析解答;接着根据粘塑性理论,假定坡土的滑移速度和粘塑性应变率满足一定函数关系;再以一种使用最为广泛和简便的土的 Cam - Clay 模型,解出土坡滑移变形速率,这样对于给定的时间就能计算其滑移变形值。整个过程中所需参数较少,计算简便,同时考虑了粘滞性参数的修正。最后通过一个算例,对本文介绍的计算方法计算的结果与实测值进行了比较分析。

## 1 无限长均质土坡应力平衡微分方程及解答

如图 1 所示,无限长斜坡上等厚度为  $H$ 、天然重度为  $\gamma$  的土层单元。在任意深度位置  $y$  ( $0 \leq y \leq H$ ) 对此无限长边坡,采用对称假定,则有  $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$ 。Cauchy 应力平衡方程为

收稿日期( Received date): 2011 - 11 - 16; 改回日期( Accepted): 2011 - 12 - 29。

基金项目( Foundation item): 国家自然科学基金重点项目( 90815024) 。 [Project Supported by National Natural Science Foundation of China ( No. 50639070) ] .

作者简介( Biography): 谢州( 1986 - ),男( 土家族),重庆酉阳人,硕士研究生。 [Xie Zhou( 1986 - ),male( Tujiazu ),was born in Youyang , Chongqing; master graduate student. ] E - mail: 306941572@qq. com

\* 通讯作者( Corresponding author): 周成,教授。 [Zhou Cheng ,professor. ]czhou@scu.edu.cn

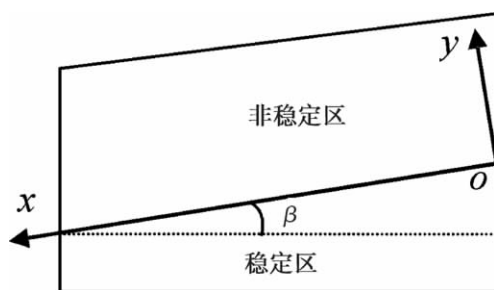


图1 土坡滑移分区示意图

Fig.1 Slope sliding partition

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \gamma \sin \beta = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \gamma \cos \beta = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

由于假定在  $y=c$  ( $c$  为常数) 的平面内是各项同性的; 应力变量包括剪应力  $\tau_{xy}$ 、顺坡向应力  $\sigma_x$  和垂直于  $xoy$  平面方向的应力  $\sigma_z$ , 都只是深度  $y$  的函数。因此垂直坡面方向的应力  $\sigma_y$  为

将  $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0$  代入式(1)得,

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \int_H^{y/\cos\beta} (\gamma \cos\beta) dy \\ &= \gamma(y - H \cos\beta) \end{aligned} \quad (2)$$

上式适用于坡面  $y=H$  处无外荷载的情况; 若有外荷载时, 上式还应加上外荷载在深度  $y$  处引起的垂直坡面方向的应力。

沿坡面方向( $x$  轴)的剪应力  $\tau_{xy}$

$$\tau_{xy} = \int_H^{y/\cos\beta} (-\gamma \sin\beta) dy = -\gamma(y - H \cos\beta) \tan\beta \quad (3)$$

同理, 若坡面有外荷载时, 上式计算的剪应力应叠加上外荷载在深度  $y$  处引起的顺坡面  $x$  轴方向的剪应力。

对于无限长土坡, 即  $z \rightarrow \infty$ , 假定为平面应变问题, 采用各向同性 Hooke 定律, 在  $y=c$  (常数) 的平面内

$$\sigma_z = \sigma_x = \frac{v}{1-v} \sigma_y = k \sigma_y \quad (4)$$

式中  $v$  为泊松比;  $k$  为侧压力系数, 即  $k = \frac{v}{1-v}$ 。

## 2 土坡变形的近似解析解

随着时间的推移, 土坡在各种荷载的长期作用

下会发生蠕变变形。土坡在蠕变滑移过程中, 变形速度是一个不可逆的变量<sup>[6-7]</sup> (Cristescu 等, 2002; Zhou 2007), 因此一般可以假定坡土的滑移速度  $V$  和粘塑性应变率  $\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$  有下列关系

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \frac{1}{2} (V_{ij} + V_{ji}) \quad (5)$$

假定如图1  $xoy$  平面坐标系中, 沿  $x$  方向(坡度  $\beta$  方向)的速度  $V_x$  只是深度的函数。  $V_x = V(y)$ ,  $V_y = 0$ ,  $V_z = 0$ ; 则有

$$\frac{dV_x}{dy} = 2\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \frac{2}{\mu} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \tau_{xy}} \quad (6)$$

式中  $Q$  为屈服面函数;  $\mu$  为粘滞性参数。

当分别采用不同的模型时, 我们可以推导出相应的变形速度  $V_x$ 。

下面介绍由 Cam-Clay 模型推导土坡蠕变变形速率场及位移场的过程。根据 Cam-Clay 模型, 土体的屈服轨迹在  $p'-q$  平面上的投影为一个椭圆<sup>[8]</sup>。屈服面函数为

$$Q = \frac{q^2}{M^2} + p'^2 - p'p'_0 = 0 \quad (7)$$

式中  $M$  为临界状态应力比, 可用常规三轴压缩确定;  $p'$  为平均有效主应力,  $q$  为广义剪应力,  $p'_0$  为广义剪应力  $q$  为 0 时的平均有效主应力, 即硬化参数。

$p'$  和  $q$  分别由以下两式计算

$$p' = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (8)$$

$$q = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]} \quad (9)$$

由公式(7)、(8)和(9)可计算

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau_{xy}} = \frac{\partial Q}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial \tau_{xy}} + \frac{\partial Q}{\partial p'} \cdot \frac{\partial p'}{\partial \tau_{xy}} = \frac{\partial Q}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial \tau_{xy}} = \frac{6\tau_{xy}}{M^2} \quad (10)$$

将式(10)代入式(6)得

$$\frac{dV_x}{dy} = \frac{2}{\mu} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \tau_{xy}} = \frac{12\tau_{xy}}{\mu M^2} \quad (11)$$

再由前面土坡极限应力平衡方程的解答式(2)、(3)和(4)得

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 3\tau_{xy}^2} \\ &= \sqrt{(k-1)^2 [\gamma(y - H \cos\beta)]^2 + 3[-\gamma(y - H \cos\beta) \tan\beta]^2} \\ &= \gamma(H \cos\beta - y) \sqrt{(k-1)^2 + 3 \tan^2 \beta} \\ \frac{dV_x}{dy} &= \frac{12[-\gamma(y - H \cos\beta) \tan\beta]}{\mu M^2} \end{aligned} \quad (12)$$

对式(12)进行积分,同时假定土坡稳定层与剪切层交界面无滑移变形,即 $V|_{y=h_1}=0$ ,得到土坡滑移区渐进变形的速度场为

$$V_x = \frac{6\gamma \tan \beta}{\mu M^2} \times [(H \cos \beta - h_1)^2 - (H \cos \beta - y)^2] \quad (13)$$

式中  $h_1$  为稳定层厚度。由式(13)可以看出,此速度场是深度坐标  $y$  的二次函数。当坡脚、粘滞性等保持不变时,速度将随  $y$  的增加先增加到最大值而后逐渐减小。

由 Cam-Clay 模型推导出速度场,再乘以时间,便可以得到土体某一深度的蠕变变形量  $U_x$ ,即

$$U_x = V_x \cdot t \quad (14)$$

式中  $U_x$  为土层沿坡度方向( $x$ 轴)的滑移位移值; $t$ 为时间。

将式(13)代入式(14)可计算土坡变形量。

### 3 粘滞性参数 $\mu$ 的修正

由式(14)计算变形量与现场实际观测数据<sup>[9]</sup>比较,如图2所示。可以看出二者相差较大,即上述模型不能较为准确地反映土体实际滑移值的大小和趋势。计算参数参照文献<sup>[9]</sup>中的参数值适当调整参数  $b$  值并通过反演分析得到,见表1。

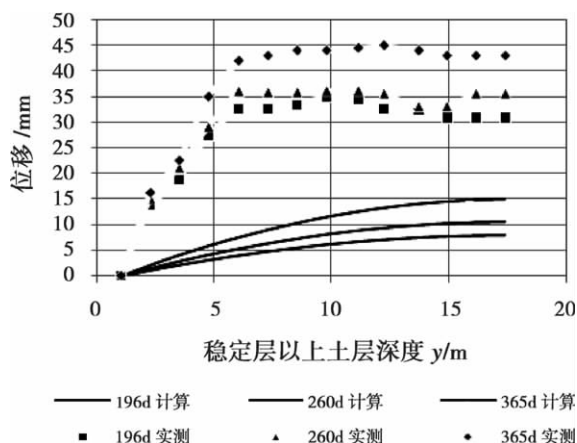


图2 式(14)计算与实测变形量比较图

Fig. 2 Equation (14) Calculated and measured deformation Comparison

通过与实测数据的比较,虽然由剑桥模型推导速度公式计算的滑动位移会收敛,但是在土层深部位移比实测偏小,而表层滑移位移又偏大。黄荣樽和邓金根<sup>[10]</sup>在研究流变地层的粘性系数(即本文粘

滞性参数  $\mu$ ) 时得出含水量是粘性系数的重要影响因素的结论。下面试图通过修正粘滞性参数来模拟无限长土坡的滑移变形及其变形趋势。粘性土坡受地下水位的影响,地下水位以下土体处于饱和状态,含水量  $w$  大,粘滞性较小;而地下水位以上由于非饱和土中的吸力影响,土体含水量  $w$  往土层表面是一个逐步减小的过程,粘滞性因而有一定的增大。所以,由含水量在土层中的分布与粘滞性的变化趋势,可以把粘滞性参数描述为随土层至坡表面距离  $y$  的函数。

另外,也有研究表明随着加载应力水平的提高( $y$  变小)细砂岩粘滞系数总体呈缩减趋势,反映了流动系数越来越大(即粘滞性减小)的一般规律<sup>[11]</sup>。将粘滞性的变化趋势与土层深度联系在一起,随着土层埋深的增加( $y$  变小)粘滞性系数总体不断减小。

综上所述,可以将粘滞性参数修正为与深度  $y$  有关的函数  $\mu = \mu(y)$ ,并拟定下式

$$\mu(y) = \mu_0 y^b \quad (15)$$

式中  $\mu_0$  为饱和土的粘滞性参数; $b$  为常数,可以通过不同土层和含水量的土体的次固结压缩试验拟合得到; $y$  为土层深度坐标,如图1所示。由此,将式(15)代入(13),得

$$V_x = \frac{6\gamma \tan \beta}{\mu_0 M^2} \cdot \frac{[(H \cos \beta - h_1)^2 - (H \cos \beta - y)^2]}{y^b} \quad (16)$$

式中各参数的意义同前所述。同样,将式(16)代入式(13)可求出模型经修正之后土坡变形计算值。

### 4 无限长边坡渐进变形例析

曾对某滑坡断面(约18 m厚)进行过超过1 a的蠕变变形量测<sup>[9]</sup>,且文献[9]给出了196 d、260 d、356 d等3个时间段的观测位移数据,本文后面的模拟计算均用此数据。由数据发现,坡体的滑移形态从下往上可以分为3个主要分层:无滑移层(约1 m厚)、剪切流动层(约5 m厚)和刚性体滑移层(约12 m厚)。下面利用上文的速度场解析模型来分析该天然土坡的渐进变形过程,并用文献[9]中3个时间段的观测位移数据进行对比分析研究。土坡土体天然重度  $\gamma = 21.85 \text{ kN/m}^3$ ,坡高度  $H = 18 \text{ m}$ ,土坡倾角  $\beta = 14^\circ$ 。

在反演分析时,保证计算位移分布形态满足观

测到的 3 个主要分层: 无滑移层(约 1 m 厚即滑移区分层高度  $h_1 = 1$  m)、剪切流动层(约 5 m 厚, 即  $h_2 = 6$  m)、以及刚性体滑移层(约 12 m 厚)。计算参数列于表 1 中。修正的粘滞性参数与土层深度的关系如图 3。3 个时间段 196、260、356 d 的观测位移数据和理论解析值一起示于图 4 中。本算例与文献 2 中的滑坡为同一滑坡, 但由于模型不同, 其算结果不完全一致, 但二者都与实测值大致相符。

表 1 模型计算参数  
Table 1 Model parameters

$v$	$\mu_0(d)$	$M$	$b$
0.35	$1.5 \times 10^8$	1.24	-0.7

由图 3 可以看出, 粘滞性参数  $\mu$  随着土层由深部到浅层(图中纵坐标的增加方向)非线性增长, 且增大的速率有越来越小的趋势, 这与我们之前关于  $\mu$  在土层中的分布——随着土层埋深的增加( $\gamma$  变小)粘滞性系数总体不断减小的推测是一致的。

由图 4 可以看出, 坡体的滑移形态从下往上基本呈现稳定层(约 1 m 厚)、剪切层(约 5 m 厚)和随动层(约 12 m 厚) 3 个主要分层, 且实测结果与理论值变化趋势较为一致。

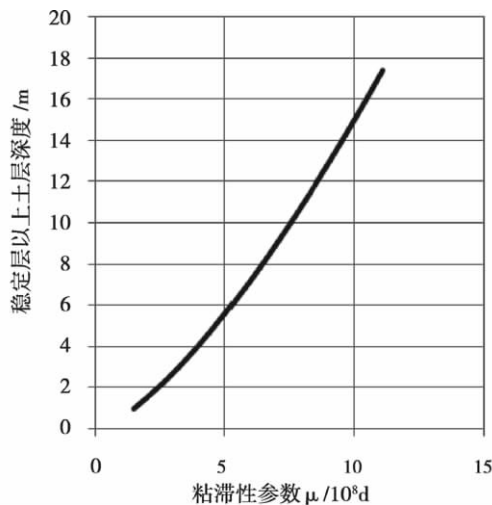


图 3 修正的粘滞性参数与深度的关系图

Fig. 3 The relationship between corrected viscosity parameters and depth of soil

同时 196 d 时, 计算值与文献给出的实测值小, 约 10 mm, 其原因在于土坡蠕变变形影响因素较多, 本模型主要引入  $b$  值考虑不同土层随含水率等因素

变化导致粘滞性参数变化的影响, 计算结果不能达到与实测值完全一致的精度。如果引入参数多些, 可以模拟得更好, 但又会由于参数过多导致不易推广应用。

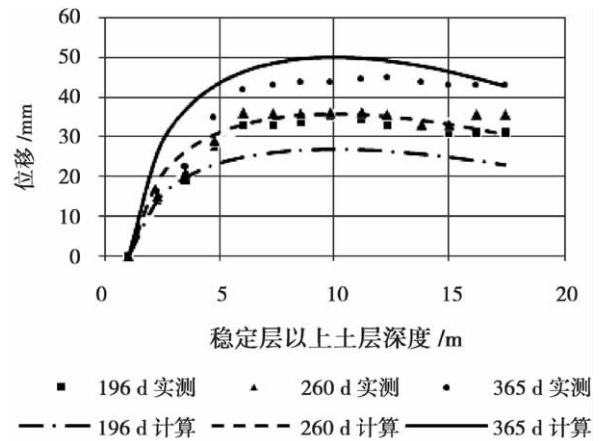


图 4 修正  $\mu$  后的计算值与实测比较图

Fig. 4 Calculated and measured deformation Comparison after correction  $\mu$

## 5 结语

从应力平衡微分方程入手, 得出土体中任意深度处应力解答。通过粘塑性理论, 推导出与粘塑性应变率场相对应的土坡滑移变形速度函数, 进而可以求出土体任意时刻的滑移变形量。整个推导过程中使用两个模型推导出两套计算公式, 计算结果均能达到一致性要求, 精度足够。中间重点对土的粘滞性作了修正, 考虑含水量和应力状态的共同作用, 拟定粘滞性为土层深度的函数。最终得到一种合适的计算土坡蠕变滑移变形量的公式。本模型使用的参数较少, 容易通过常规试验确定, 对于不同类型的土层只需修正公式中的常量。应用该模型对某天然土坡的实测数据进行了比较分析, 实测结果与理论值较为一致。

## 参考文献 (References)

- [1] Li Guangxin. Advanced soil mechanics [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004: 7 [李广信. 高等土力学. 北京: 清华大学出版社, 2004: 7]
- [2] Zhou Chen, Cai Zhengyin, Xie Heping. Analytical model for the progressive deformation of natural fissured slopes [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, (2): 174 - 178 [周成, 蔡正银, 谢和平. 天然裂隙土坡渐进变形解析 [J]. 岩土工程学报, 2006, (2): 174 - 178]

- [3] Terzaghi K. Stability of slopes of natural clay[C]// Proc 1st Intl. Conf Soil Mech Found Eng Harvad, 1936, 1: 161 – 165
- [4] Shen Zhujiang. Theoretical soil mechanics[M]. Beijing: China Hydraulic and Hydropower Publishing House, 2000: 291 – 292 [沈珠江. 理论土力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2000: 291 – 292]
- [5] Vulliet L. Natural slopes in slow movement[C]// Modeling in Geomechanics. Chichester, 2000: 654 – 676
- [6] Cristescu N D, Cazacu O, Cristescu C. A model for slow motion of natural slopes[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2002, 39: 924 – 937
- [7] Zhou C. Deformation analysis of partially saturated soil in slopes[J]. Key Engineering Materials, 2007, 34: 1261 – 1226
- [8] Qu Zhijiong, Liu Enlong. Soil plasticity (second edition). Science Press, 2011, 9: 164 – 165 [屈智炯, 刘恩龙. 土的塑性力学(第二版). 科学出版社, 2011, 9: 164 – 165]
- [9] Desai C S, Samtani N C, Vulliet L. Constitutive modeling and analysis of creeping slopes[J]. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 1995, 121: 43 – 56
- [10] Huang Rongzun, Deng Jingen. The viscosity coefficient of rheological formation and its influential factors[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2000, (Suppl. 1): 836 – 839 [黄荣樽, 邓金根. 流变地层的粘性系数及其影响因素[J]. 岩石力学与工程学报, 2000, (增刊 1): 836 – 839]
- [11] Liu Chuanxiao, Zhang Jiawang, He Jiadong, et al. Phase deformation and viscous properties in creep test for fine sandstone specimen[J]. Mining and Metallurgy, 2010, (4): 12 – 15 [刘传孝, 张加旺, 贺加栋, 等. 细砂岩阶段蠕变特征与粘滞性试验研究[J]. 矿冶, 2010, (4): 12 – 15]

## Simulation of the Deformation of Infinite Soil Slope

XIE Zhou, ZHOU Cheng, LIU Jiao, ZENG Zi

(College of Hydraulic and Hydroelectric Engineering, National Key Laboratory of Hydraulic and Mountain River Engineering, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

**Abstract:** Element stress is derived from the stress equilibrium differential equations under the plane strain conditions. Viscoplasticity model is used between velocity and the viscoplastic strain of the slope soil. Then Cam – Clay model is used to derive the explicit expressions of the deformation rate with the depth of slope soil. The slope deformation is calculated. Simulation accuracy is improved by modifying the viscosity. Finally, numerical example is given in comparison with the field measured data and good agreement is achieved.

**Key words:** deformation of slope soil; viscoplastic strain rate; viscosity; analytical solution