

对数正态分布下边坡稳定性二元指标体系研究

罗文强¹, 龚 珏², 王亮清³, 方 云³

(1. 中国地质大学数理学院, 湖北 武汉 430074; 2. 中国地质大学图书馆, 湖北 武汉 430074;

3. 中国地质大学工程学院, 湖北 武汉 430074)

摘 要: 安全系数不能考虑边坡系统中实际存在的不确定性, 可靠性理论缺乏丰富的工程实践经验, 因此, 将工程实践经验丰富的安全系数与先进的可靠性理论相结合, 建立传统安全系数与可靠性相耦合的二元评价体系具有重要的理论意义和应用价值。设安全系数服从对数正态分布, 取系列的最大可能安全系数 (中值安全系数) 和变异系数, 计算得到最大可能安全系数及在不同变异系数下的破坏概率 P_f 。从而可由最大可能安全系数和可靠性 ($R = 1 - P_f$) 共同度量边坡的稳定性。将最大可能安全系数与边坡可靠性相乘, 对最大可能安全系数进行折减, 得到边坡可靠的安全系数。根据折减后安全系数的极限状态, 可计算出不同最大可能安全系数的临界变异系数和临界破坏概率。根据不同最大可能安全系数及它的临界破坏概率, 绘出边坡稳定性分区图, 并建立安全系数和破坏概率相结合的边坡稳定性判别的二元指标体系。文中提供了小样本条件下, 利用 3 倍方差原理估计参数方差的计算方法, 并给出了边坡稳定性二元指标体系的研究实例。

关键词: 边坡稳定性; 最大可能安全系数; 对数正态分布; 可靠性; 二元指标体系

中图分类号: P642; TB114

文献标识码: A

边坡稳定性评价指标通常是用安全系数, 在工程实践中广为采用, 积累了丰富的实践经验, 但是不能考虑边坡系统内的不确定性, 在应用中有一定的局限性, 如: 所求的最危险的滑动面不一定是实际的滑动面^[1]; 同样的安全系数, 可靠性却不一样^[2]; 更为严重的是, 有时会出现安全系数 > 1 却发生破坏, 造成重大损失; 安全系数 < 1 , 却又安全的反常现象。产生这种“反常”现象的主要原因是由于计算参数是离散的, 具有变异性和相关性。实际的安全系数不一定恰好是分子和分母的均值之比, 因此产生这种“反常”现象是很正常的。

可靠性理论可有效地考虑边坡系统内实际存在的不确定性和相关性。对于不确定性很高的降雨、地震、人类工程活动, 可以利用可靠性进行度量, 但是全面且先进的可靠性理论, 还不能像机械工程、结构工程那样广泛地应用工程实际, 很好地解

决实际的边坡工程问题。其中一个重要的原因是缺乏丰富的工程实践经验, 加上需要更多的数据和更大的计算量, 使得实际应用受到极大地制约^[3, 4]。因此, 将工程实践经验丰富的安全系数与先进的可靠性理论相结合, 取长补短, 互相借鉴^[4, 5], 建立有效、实用的安全系数与可靠性相耦合的二元评价体系具有重要的理论意义和应用价值。

安全系数一般服从正态分布和对数正态分布, 本文基于对数正态分布, 对边坡稳定性二元指标体系的建立和应用进行探讨。

1 安全系数与破坏概率

设安全系数

$$\begin{aligned} F &= F(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ &= \frac{R(x_1, x_2, \dots, x_m)}{S(x_1, x_2, \dots, x_m)} \end{aligned} \quad (1)$$

收稿日期 (Received date): 2005- 02- 15; 改回日期 (Accepted): 2005- 04- 30。

基金项目 (Foundation item): 国家自然科学基金项目“边坡稳定性二元指标体系及应用研究” (40372120) 资助。[Supported by the National Nature Science Foundation of China, "Study on slope stability by dual index system and its application" No. 40372120]

作者简介 (Biography): 罗文强 (1963-), 男, 湖北襄樊人, 博士后, 教授, 主要从事岩土工程可靠性分析等方面的研究工作。[Luo Wenqiang (1963-), male, Born in Xiangfan City, Hubei Province, Doctor, Professor, Mainly research fields: Reliability of geotechnical engineering. Tel: (027) 67883339; Email: wqluo@cug.edu.cn]

其中 R 为抗滑力, S 为下滑力, x_1, x_2, \dots, x_m 为重度、粘聚力、摩擦系数、孔隙水压力、荷载强度、降雨强度等计算参数, 实际取值中均有一定的变异性, 可视为随机变量, 它们具有一定的分布, 大多服从正态分布和对数正态分布, 本文在对数正态分布的情形下进行研究。随机地抽取一组样本值 (x_1', \dots, x_m') , 由 (1) 式求得一个安全系数的样本值 F' 。取变量 x_1, x_2, \dots, x_m 的平均值 $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_m})$, 计算得到通常意义下的安全系数, 称之为最大可能安全系数, 亦称中值安全系数, 记为 F_0 , 即

$$F_0 = F(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_m}) \tag{2}$$

在实际应用中, 用 F_0 近似作为安全系数 F 的数学期望 $E(F)$, 即

$$E(F) \approx F_0 = F(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_m}) \tag{3}$$

如果知道了 F 的方差 $D(F)$ (方差的估计见第 3 段), 定义安全系数的变异系数为

$$\delta_F = \frac{\sqrt{D(F)}}{E(F)} \tag{4}$$

式 (4) 描述了安全系数的变异性。由 F 服从对数正态分布, 即 $\ln F$ 服从正态分布, 设 $\ln F$ 的均值为 μ , 方差为 σ^2 , 则 $\ln F \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。经过推导运算我们得到 F 的均值, 方差与均值 $\ln F$, 方差的关系为

$$E(F) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \tag{5}$$

$$D(F) = \exp(2\mu + 2\sigma^2) - \exp(2\mu + \sigma^2) \tag{6}$$

由 (4), (5), (6) 式求解得:

$$\mu = \ln \frac{E(F)}{\sqrt{1 + \delta_F^2}} \tag{7}$$

$$\sigma^2 = \ln(1 + \delta_F^2) \tag{8}$$

由上述参数的关系, 可以求出边坡的破坏概率为

$$P_f = P(F < 1) = P(\ln F < 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \tag{9}$$

$$\text{其中 } \beta = -\frac{\mu}{\sigma} = \frac{\ln(\sqrt{1 + \delta_F^2} - \ln E(F))}{\sqrt{\ln(1 + \delta_F^2)}}.$$

2 对数正态分布下二元指标体系建立

设安全系数服从对数正态分布, 取系列的最大可能安全系数 (中值安全系数) F_0 和变异系数 δ_F , 计算得到最大可能安全系数在不同变异系数下的破坏概率。从而可由最大可能安全系数和可靠性 $(1 - P_f)$ 共同度量边坡的稳定性。例如: $F_0 = 1.05$, $\delta_F = 0.10$, 由 (9) 式计算得到: $P_f = 0.3300$; $F_0 = 1.05$, $\delta_F = 0.20$, 由 (9) 式计算得到: $P_f = 0.4404$; 同样 $F_0 = 1.25$, $\delta_F = 0.10$, 计算得到: $P_f = 0.0143$; $F_0 = 61.25$, $\delta_F = 0.20$, 计算得到: $P_f = 0.1515$; 其它的详细计算值列于表 1。

表 1 对数正态分布下边坡的破坏概率
Table 1 Failure probabilities of slope based on lognormal distribution

F_0	安全系数的变异系数 (δ_F)											
	0.02	0.05	0.08	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.80
1.05	0.007 5	0.171 1	0.283 4	0.330 0	0.401 3	0.440 4	0.472 1	0.492 0	0.523 9	0.551 7	0.575 3	0.610 3
1.10	0.000 0	0.030 0	0.125 1	0.181 4	0.287 7	0.352 0	0.397 4	0.428 6	0.490 1	0.512 0	0.543 8	0.583 2
1.15	0.000 0	0.002 8	0.043 6	0.088 5	0.194 9	0.270 9	0.330 0	0.370 7	0.432 5	0.476 1	0.512 0	0.559 6
1.20	0.000 0	0.000 0	0.012 6	0.037 5	0.125 1	0.206 1	0.267 6	0.319 2	0.389 7	0.440 4	0.480 1	0.535 9
1.25	0.000 0	0.000 0	0.003 0	0.014 3	0.077 8	0.151 5	0.212 7	0.270 9	0.348 3	0.405 2	0.448 3	0.512 0
1.30	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.004 9	0.046 5	0.109 3	0.173 6	0.226 6	0.312 1	0.374 5	0.420 7	0.491 0
1.35	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.001 4	0.026 2	0.077 8	0.135 7	0.124 5	0.277 6	0.344 6	0.397 4	0.468 1
1.40	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.014 6	0.054 8	0.107 5	0.158 7	0.248 3	0.319 2	0.370 7	0.448 3
1.50	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.004 1	0.025 6	0.064 3	0.109 3	0.194 9	0.267 6	0.326 4	0.412 9
1.60	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 1	0.011 6	0.036 4	0.073 5	0.151 5	0.223 6	0.284 3	0.344 6
1.70	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.004 9	0.021 2	0.047 5	0.119 0	0.186 7	0.248 3	0.344 6
1.80	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.002 1	0.011 9	0.031 4	0.091 8	0.156 2	0.217 7	0.315 6
1.90	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.006 6	0.020 7	0.070 8	0.131 4	0.189 4	0.287 7
2.00	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.003 6	0.013 6	0.053 7	0.109 3	0.166 0	0.264 3
2.50	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.001 5	0.014 3	0.044 6	0.083 8	0.171 1
3.00	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.003 9	0.018 3	0.044 6	0.113 1

根据表 1 计算的边坡破坏概率和最大可能安全系数, 将最大可能安全系数与边坡可靠性相乘, 对最大可能安全系数进行折减, 得到边坡折减的安全系数, 记为 F_1 , 即

$$F_1 = F_0 \times (1 - P_f) \tag{10}$$

例如: $F_0 = 1.05$, $\delta_F = 0.02$, $P_f = 0.007\ 5$, 由 (10) 式计算得到: $F_1 = 1.042\ 1$; 同样 $F_0 = 1.25$, $\delta_F = 0.10$, $P_f = 0.014\ 3$, $F_1 = 1.232\ 1$ 。设折减后的安全系数 > 1.05 , 边坡稳定; < 1.05 , 边坡失稳, 则对应的极限状态是折减后安全系数等于 1.05。根据折减后安全系数的极限状态, 可计算出不同最大可能安全系数的临界破坏概率 (最大允许破坏概率) 和临界变异系数 (最大允许变异系数)。例如, $F_0 = 1.10$, 临界的破坏概率 $P_0 = 0.045\ 5$, 临界的变异系数 $\delta_0 = 0.055\ 6$ 。不同最大可能安全系数的临界破坏概率计算值列于表 2, 其关系曲线见图 1, 由此我们得到安全系数和破坏概率联合判别边坡稳定的二元指标分区。

3 方差的估计

在边坡的可靠性研究中, 方差的计算与估计起着关键的作用。如果数据非常充分, 可直接用通常的估计公式

$$D(X) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2 \tag{11}$$

计算, 这里是样本值, $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$ 是平均值, 是样本容量。但在实际的工程中, 由于实地勘察和测试

的局限性, 数据较少, 用 (11) 式计算会有较大的误差。下面介绍几种适用于样本较少的计算方法。

3.1 估值法

由 (4) 式, 随机变量 X 变异系数定义为

$$\delta_X = \frac{\sqrt{D(X)}}{E(X)} \tag{12}$$

设的标准差为, 得到的标准差为:

$$\sigma_X = \delta_X \times E(X) \tag{13}$$

根据实际工程经验和已知的文献资料, 可估计出参数的变异系数, 例如: 重度的变异系数为 0.03~0.07, 浮重度的变异系数为 0~0.10, 剪切强度的变异系数为 0~0.5^[6]。知道参数的变异系数后, 由 (11) 式容易计算出参数的标准差。

对 (1) 式进行 Taylor 展开, 得到安全系数方差的近似计算公式为

$$D(F) \approx \frac{\sigma_R^2}{\mu_S^2} + \left(\frac{\alpha_S}{\mu_S^2}\right)^2 \mu_R^2 = \frac{\delta_R^2 \mu_R^2}{\mu_S^2} + \left(\frac{\delta_S}{\mu_S}\right)^2 \mu_R^2 \tag{14}$$

这里 μ_R , μ_S 为 R , S 的平均值, σ_R , σ_S 为 R , S 的标准差, δ_R , δ_S 为 R , S 得变异系数。

3.2 3σ 估计方法

3σ 估计方法是用区间估计的原理, 对方差进行估计, 具体原理为: 如果变量 X 服从正态分布, 其均值和标准差为 μ 和 σ , 则

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9974 \tag{15}$$

即变量 X 以 99.74% 的概率在区间 $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ 上取值。因此, 在实际应用中, 可将变量 X

表 2 最大可能安全系数与临界破坏概率

Table 2 Most likely safety factor and critical failure probabilities

F_0	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35
临界破坏概率	0.000 0	0.045 4	0.087 0	0.125 0	0.160 0	0.192 3	0.222 2
F_0	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	2.00
临界破坏概率	0.250 0	0.300 0	0.343 8	0.382 4	0.416 7	0.447 4	0.475 0

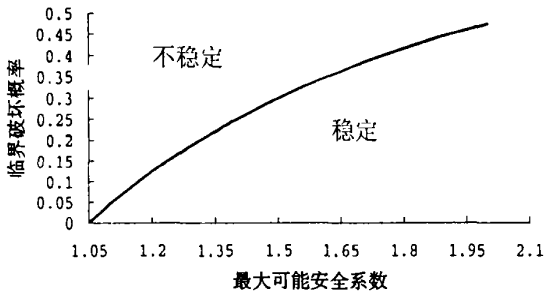


图 1 最大可能安全系数与临界破坏概率

Fig. 1 Most likely safety factor and critical failure probabilities

样本的最大值 X_{\max} 作为 $\mu + 3\sigma$ 的估计式, 最小值 X_{\min} 作为 $\mu - 3\sigma$ 的估计式, 由此, 我们得到标准差 σ 的估计式为

$$\sigma = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{6} \tag{16}$$

这样在小样本的条件下, 我们也可以方便地近似计算出标准差。如果变量服从非正态分布, 且样本较少也可以用 (16) 式近似计算出标准差。

4 应用实例

某岩质边坡, 潜在滑动面为一平面, 边坡的安全系数为

$$F = \frac{W \cos \alpha \cdot f + C \cdot l}{W \sin \alpha} \quad (17)$$

式中 $W = \frac{\gamma H \cos \alpha \cdot l}{2}$ 为边坡的重量; γ 为重度; H 为坡高; α 为坡角; c 为粘聚力; l 为滑动面长; f 为摩擦系数。由于岩土体容重的变异性较小, 对边坡破坏概率影响相对参数 c 和 f 要小, 计算中将 c 和 f 作为随机变量, γ 、 H 、 c 、 l 为确定值, 则 F 为随机变量。

参数取值如下: $\gamma = 22.0 \text{ kN/m}^3$, $\alpha = 39.5^\circ$, $H = 29.5 \text{ M}$, c 和 f 最大可能取值 (平均值) 分别为: $\mu_c = 140 \text{ kPa}$, $\mu_f = 0.3640$ 代入 (17) 式计算得到最大可能安全系数为, $F_0 = 1.3206$ 。

考虑 c 和 f 的变异性, 设 c 和 f 的变异系数分别为: $\delta_c = 0.13$, $\delta_f = 0.05$, 由 (13) 式计算得到 c 和 f 的标准差分别为: $\sigma_c = 18.2 \text{ KPa}$, $\sigma_f = 0.0182$ 。由 3σ 原理得到:

$$C_{\max} = \mu_c + 3\sigma_c = 194.6 \text{ kPa} \quad (18)$$

$$C_{\min} = \mu_c - 3\sigma_c = 85.4 \text{ kPa} \quad (19)$$

$$f_{\max} = \mu_f + 3\sigma_f = 0.4186 \quad (20)$$

$$f_{\min} = \mu_f - 3\sigma_f = 0.3094 \quad (21)$$

将 (18) 式、(20) 式代入 (17) 式计算得到最大安全系数 $F_{\max} = 1.7296$, 同样将 (19) 式、(21) 式代入 (17) 式计算得到最小安全系数 $F_{\min} = 0.9115$ 。由 (16) 式计算得到安全系数的标准差为

$$\sigma_F = \frac{F_{\max} - F_{\min}}{6} = 0.1364 \quad (22)$$

由 (12) 式计算得到安全系数的变异系数为

$$\delta_F = \frac{\sigma_F}{\mu_F} = \frac{\sigma_F}{F_0} = 0.1033 \quad (23)$$

根据 2 段所论述, 得到边坡的破坏概率为 0.0040, 边坡可靠性为 0.9960, 折减的最大可能安全系数为 1.3153。由图 1 知, 该边坡处于稳定状态。

5 结论

将工程实践经验丰富的安全系数与先进的可靠性理论相结合, 建立安全系数与可靠性相耦合的二元评价体系, 可取长补短, 相互补充, 有效客观地评价边坡稳定性, 更好地为边坡的工程治理和风险评价服务; 原理是计算参数方差一种有效简洁的方法, 尤其适用于小样本、分布未知的工程实例。

参考文献 (References):

- [1] Nadim F, Lacasse S. Probabilistic slope stability evaluation [A]. In: Geotechnical Risk Management [C]. Hong Kong: Hong Kong Institution of Engineers. 1999. 179~186
- [2] Park H, West T R. Development of Probabilistic approach for rock wedge failure [J]. *Engineering Geology*, 2001, **59** (3-4): 233~251
- [3] Liang RY, Nusier O K, Malkawi A H. A reliability based approach for evaluation the slope stability of embankments dams [J]. *Engineering Geology*, 1999, **54** (3-4): 271~285
- [4] Duncan J M. Factor of safety and reliability in geotechnical engineering [J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2000, **126** (4): 307~323
- [5] Luo Wenqiang, Gong Jue, Wang Hongxing. Study on slope stability by dual index system and its application [J]. *Advance in earth sciences*, 2004, **19** (supplement): 300~303 [罗文强, 龚珏, 王洪兴. 边坡稳定性二元指标体系与应用研究 [J]. *地球科学进展*, 2004, **19** (增刊): 300~303]
- [6] Duncan J M. Factor of safety and reliability in geotechnical engineering [J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2000, **126** (4): 307~323
- [7] Luo Wenqiang, Yan Tongzhen. Probability analysis of coefficient of slope stability [J]. *Earth Science—Journal of Chinese University of Geosciences*. 1996, **21** (6): 653~655 [罗文强, 晏同珍. 斜坡稳定系数的概率分析 [J]. *地球科学—中国地质大学学报*, 1996, **21** (6): 653~655]

Study on Dual Index System of Slope Stability Based on Lognormal Distribution

LUO Wenqiang¹, GONG Jue², WANG Liangqing³, FANG Yun³

(1. School of Mathematics and Physics, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China;

2. Library, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China;

3. Engineering Faculty, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China)

Abstract: Safety factor cannot consider uncertainty of parameters and models in slope system, reliability theory lacks abundant experience, therefore it is necessity to build dual index system of slope stability coupling safety factor and reliability theory. Suppose that safety factors obey lognormal distribution, we took a series of most likely safety factors (mean safety factors) and variation coefficient of safety factor, and computed failure probabilities of slope P_f in different most likely safety factors and variation coefficient of safety factor. Hence, we may measure slope stability using safety factor and reliability ($R = 1 - P_f$) together. In this way, we may obtain a series most likely safety factors and failure probabilities (or reliability). We multiply most likely safety factors by corresponding reliability and reduce most likely safety factors, and obtain reliability safety factor of slope. According to limit state of reduced safety factor, we can compute critical failure probability and variation coefficient corresponding different most likely safety factors. According to different most likely safety factors and their failure probabilities, we made a divisional chart of slope stability and set up dual index system of slope stability combining safety factor and reliability. We also provided a research example and expounded estimation of variance with Three-Sigma Rule in little sample size.

Key words: slope stability; most likely safety factor; lognormal distribution; reliability; dual index system

征集英文科技论文启事

为了有效地开展和扩大学术交流, 有力地向国际学术界推介和宣传中国山地科学学者及其研究成果, 更好地使中国山地研究与国际山地研究接轨, 本刊已从 2001 年开始不定期插发少量英文科技论文。据反馈信息, 插发英文科技论文形式可取, 效果较好。为此, 本刊将征集英文科技论文有关事宜通告如下:

1. 选题

宜集中在两方面:

- (1) 山地环境演变及其与人类活动关系 要求从野外观测实验中实际获取的第一手资料总结的成果;
- (2) 山区发展技术与管理经验 要求有区域代表性、可重复性、可操作性。

2. 内容

应是有国际学术交流背景和前提, 须与国际同类题材研究处在同一学术研究平台上。

3. 来稿方式

可以直接写成英文论文投稿 (但须附对译中文稿)。

本刊对英文文稿优先处理, 一旦接受发表, 待刊期 30~50 天, 最长不超过 60 天。

《山地学报》编辑部