

# 地形复杂度对坡度坡向的影响

李天文<sup>1</sup>, 刘学军<sup>2,3</sup>, 汤国安<sup>2</sup>

(1. 西北大学 城市与资源学系, 陕西 西安 710069; 2. 南京师范大学 地理科学学院, 江苏 南京 210097;

3. 长沙理工大学公路工程学院, 湖南 长沙 410076)

**摘 要:** 采用三阶不带权差分算法, 研究了地形复杂度与坡度坡向的关系, 澄清了目前关于坡度坡向误差空间分布的矛盾观点, 并分别在凹向椭球和高斯合成曲面数学模型曲面 DEM 上对其进行验证。通过研究得出: ①坡度、坡向误差与坡度值正相关; ②坡度坡向误差主要分布在平坦地区; ③坡向误差较坡度误差对 DEM 高程数据误差敏感, 较小的 DEM 误差引起较大的坡向误差。

**关键词:** 数字高程模型; 地形复杂度; 坡度; 坡向

中图分类号: P931

文献标识码: A

数字高程模型( DEM ) 作为地理信息系统( GIS ) 空间数据库的核心数据库之一, 不但是进行三维地形空间模拟和地形图生产的基础, 而且能派生出各种地形因子如坡度、坡向、平面曲率、剖面曲率、汇水面积等, 这些地形因子在水文模型建立、土壤侵蚀分析、水土流失监测、地貌形态模拟、生态环境研究等地学分析领域有着广泛的应用, 而坡度坡向是两个最为常用和重要的地形因子。

尽管利用 GIS 平台在 DEM 上提取坡度坡向的技术已基本成熟[ 汤国安等, 2001 ]<sup>[1]</sup>, 但由于 DEM 本身是对地形表面的一种模拟, 势必受到原始数据误差、内插算法、格网分辨率等的影响[ 刘学军, 2002 ]<sup>[2]</sup>, 也必然影响到坡度坡向的计算精度。目前虽然许多学者都从不同的侧面对基于 DEM 坡度坡向算法精度与适用性进行了分析[ 赵牡丹等, 2002 ]<sup>[3]</sup>, 但由于分析方法和技术手段的限制, 还存在几个矛盾的结论[ Florinsky, 1998 ]<sup>[4]</sup>, 其中之一便是坡度坡向误差的空间分布, 如 Chang<sup>[5]</sup> 和 Tsai ( 1991 ) 认为坡向误差在平坦地区较大而坡度误差主要集中在较陡的地方; Cater ( 1992 ) 认为坡度坡向误差都分布在平坦地区<sup>[6]</sup>; Davis 和 Dozier ( 1990 ) 的研

究发现坡度坡向误差集中在坡度突变地带<sup>[7]</sup>。

本文首先从理论分析角度探讨坡度坡向中误差与地形复杂度的关系, 然后在 DEM 上对理论分析结论进行验证。研究主要揭示坡度坡向误差的空间分布状态, 旨在澄清上述矛盾结论。

## 1 坡度、坡向误差与坡度关系

地表上某点的坡度  $S$ 、坡向  $A$  是地形曲面函数  $z = f(x, y)$  在东西、南北方向上偏导数函数, 即

$$S = \arctan \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \quad (1)$$

$$A = 270^\circ + \arctan(f_y/f_x) - 90^\circ f_x/|f_x| \quad (2)$$

式中  $f_x$  是南北方向偏导数,  $f_y$  是东西方向偏导数。

由(1)、(2)两式知, 求解地面某点的坡度和坡向, 关键是求解  $f_x$  和  $f_y$ 。格网 DEM 是以离散形式表示地形曲面且曲面函数一般也不知道, 因此在格网 DEM 上对  $f_x$  和  $f_y$  的求解, 一般是在局部范围(  $3 \times 3$  移动窗口 ) 内, 通过数值微分方法或局部曲面拟合方法进行<sup>[8]</sup>。目前在 DEM 上关于  $f_x$  和  $f_y$  的求解方法有多种, 考虑到本文的研究内容, 并且不同的

收稿日期( Received date ): 2004- 01- 05; 改回日期( Accepted ): 2004- 03- 12。

基金项目( Foundation item ): 国家自然科学基金( 40271089 )。[ National Natural Science Foundation of China, No. 40271089. ]

作者简介( Biography ): 李天文( 1957- ), 男( 汉 ), 陕西户县人, 西北大学城市与资源学系副教授, 主要从事全球定位系统、地理信息系统工程等方面的科研和教学。[ LI Tianwen ( 1957- ), Associate professor of Northwest University, specialized in Global Position System ( GPS ), Engineering surveying and mapping and GIS- based spatial analysis. ]

$f_x$  和  $f_y$  计算差别在于系数上[刘学军, 2002]<sup>[12]</sup>, 而对坡度坡向的影响也仅在误差大小上, 故本文采用常用的三阶不带权差分算法, 即在  $3 \times 3$  移动窗口中(图 1), 利用中心点周围的 8 个格网点高程计算  $f_x$  和  $f_y$ 。窗口在 DEM 数据矩阵中连续移动后完成整幅 DEM 的格网点坡度坡向计算。

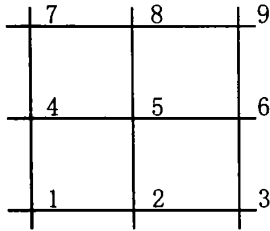


图 1  $3 \times 3$  DEM 移动窗口  
Fig. 1 Floating window of  $3 \times 3$  DEM

参看图 1, 三阶不带权差分 [Sharpnack and Akin, 1969]<sup>[13]</sup> 关于中心点 5 处的  $f_x$  和  $f_y$  的计算公式为(式中  $g$  为 DEM 分辨率)

$$\begin{aligned} f_x &= (z_7 - z_1 + z_8 - z_2 + z_9 - z_3)/6g \\ f_y &= (z_3 - z_1 + z_6 - z_4 + z_9 - z_7)/6g \end{aligned} \quad (3)$$

设 DEM 中误差为  $m$ , 则通过误差传播定律, 由(3)式可求得  $f_x$  和  $f_y$  的中误差为

$$m_{f_x}^2 = m_{f_y}^2 = \frac{m^2}{2g^2} \quad (4)$$

对坡度坡向公式(1)、(2)式微分, 并考虑到  $S = \arctan \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$  和  $\tan^2 S = f_x^2 + f_y^2$  有

$$dS = \frac{f_x df_x + f_y df_y}{(1 + \tan^2 S) \tan S} \quad dA = \frac{f_y df_x - f_x df_y}{\tan^2 S} \quad (5)$$

顾及(4)式, 则得坡度中误差  $m_s$ 、坡向中误差  $m_A$  为

$$m_s = \pm \frac{m}{\sqrt{2}g} \cos^2 S \quad m_A = \pm \frac{m}{\sqrt{2}g} \cot^2 S \quad (6)$$

由(6)式不难看出: 在格网分辨率和 DEM 误差一定的情形下, 坡度中误差  $m_s$ 、坡向中误差  $m_A$  与坡度  $S$  值本身相关。坡度取值  $0^\circ \sim 90^\circ$ ,  $\cos^2 S$  和  $\cot S$  均大于零, 因而这种相关是正向的。考虑到  $\cos^2 S$  和  $\cot S$  函数特性(图 2), 坡度  $S$  越大, 坡度中误差  $m_s$ 、坡向中误差  $m_A$  越小, 坡度  $S$  越小, 坡度中误差  $m_s$ 、坡向中误差  $m_A$  越大, 因此坡度、坡向误差主要分布在较为平坦区域; 同时  $\cot S$  变化较快  $\cos^2 S$ , 这意味着较小的坡度变化产生较大  $\cot S$ , 因而坡向误差比坡度误差对地形变化更为敏感。

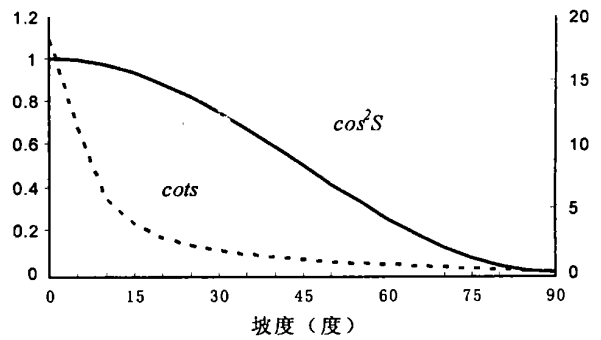


图 2  $\cos^2 S$ ,  $\cot S$  与坡度的关系  
Fig. 2 Relation of  $\cos^2 S$  and  $\cot S$

## 2 实验验证

为考察上述结论的正确性, 在不同的数学曲面 DEM 上对上述结论进行了实验验证。此处之所以采用数学曲面 DEM, 一方面在数学曲面 DEM 上, 由于曲面函数已知, 故可获得给定位置的坡度坡向真值, 通过真值与计算值的对比, 可统计得出坡度坡向中误差。过去一些研究中常常采用野外测量、地形图上量测 [Band, 1986; Skidmore, 1989; Quinn et al, 1991; Chang and Tsai, 1991; Desmet and Govers, 1996; Mendicino and Soil, 1997]<sup>[9~11]</sup> 等值作为误差分析的参考值, 忽视了这些值本身就含有较大的误差, 并不能看作是真值, 而且易于导致一些矛盾的结论。另一方面, 实际 DEM 受许多不确定因素的影响, DEM 误差一般较难估计, 而在数学曲面 DEM 上, 可对离散化后的数学曲面 DEM 施加先验特性已知的随机噪音, 从而获得 DEM 误差<sup>[14]</sup>。

本研究所选取的两个数学曲面分别为凹向椭圆和高斯合成曲面, 并对此曲面在给定的区域边界内按一定分辨率格网化建立数学曲面 DEM 如图 3 所示。其中凹向半椭圆定义为

$$x^2/A^2 + y^2/B^2 + z^2/C^2 = 1 (z < 0) \quad (7)$$

高斯合成曲面定义为

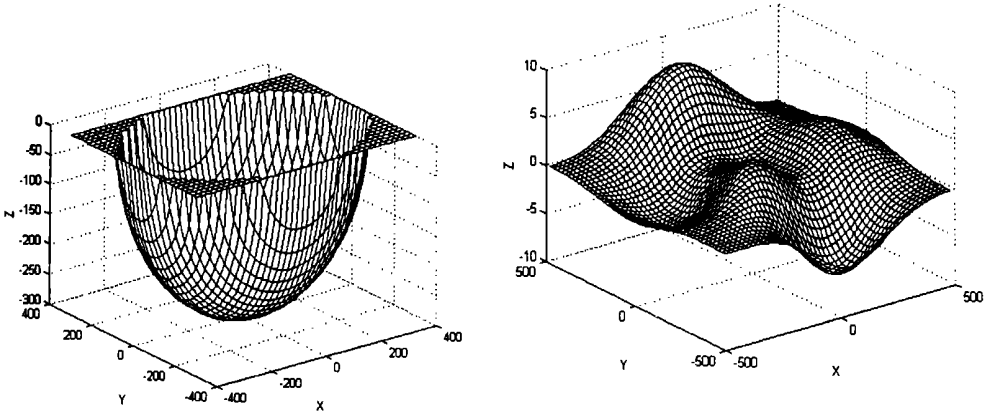
$$\begin{aligned} z = A & \left[ 1 - \left( \frac{x}{m} \right)^2 \right] e^{-\left( \frac{x}{m} \right)^2 - \left( \frac{y}{n} \right)^2} - B \left[ 0.2 \left( \frac{x}{m} \right) - \left( \frac{x}{m} \right)^3 \right. \\ & \left. - \left( \frac{y}{n} \right)^5 \right] e^{-\left( \frac{x}{m} \right)^2 - \left( \frac{y}{n} \right)^2} - C e^{-\left[ \left( \frac{x}{m} \right) + 1 \right]^2 - \left( \frac{y}{n} \right)^2} \end{aligned} \quad (8)$$

式中  $A$ 、 $B$ 、 $C$  为地势起伏参数,  $m$ 、 $n$  为范围控制参数。两种曲面上的坡度坡向真值计算公式可通过曲面表达式(7)、(8)由(1)、(2)式导出。(7)、(8)式中的参数可改变, 以便模拟不同的地形起伏曲面。

图 4 是在具有不同扁率的椭球 DEM 上的坡度坡向中误差统计结果。椭球扁率定义为  $E = C/A$  ( $C$  为椭球  $Z$  轴半径,  $A$  为椭球长轴半径)。扁率反映了椭球的缓陡变化状态。由图中可看出, 随着椭球由陡变缓( $E$  从 4.0 到 0.1), 10m 格网分辨率的椭球 DEM 的平均坡度由  $74^\circ$  下降到  $8^\circ$ , 而坡度中误

差却从  $1.87^\circ$  上升到  $10.4^\circ$ , 坡向中误差从  $19.3^\circ$  上升为  $130.82^\circ$ 。

对于简单曲面可采用较为简单的指标如扁率描述曲面起伏状态, 而复杂地表则需要较多的指标来刻画。描述地形复杂度的指标并不一致, Gao (1998) 曾利用地势起伏参数 (最大高程与最小高程



左: 凹向半椭球( $A = 400; B = C = 300$ ); 右: 高斯合成曲面( $A = 3; B = 10; C = 1/3$ )  
Left: concave half ellipsoid( $A = 400; B = C = 300$ ); Right: gauss synthetical surface( $A = 3; B = 10; C = 1/3$ )

图 3 模拟曲面 DEM

Fig. 3 Simulation curve surface DEM

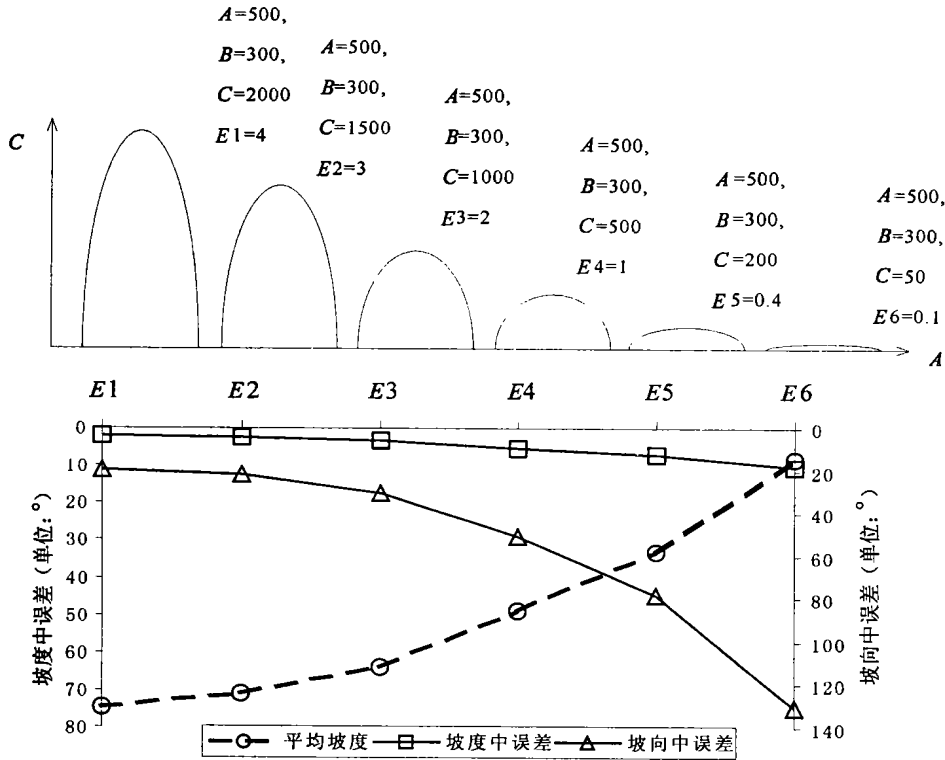


图 4 不同扁率椭球 DEM 的坡度坡向误差分布(DM 分辨率 10 m, DEM 中误差 4.558 m)

Fig. 4 Distribution of gradient and aspect error for differ flat ratio ellipsoid DEM(DM resolution is 10 m, DEM half error is 4.558 m)  
© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

之差)、高程标准偏差及单位面积等高线分布密度(单位面积等高线长度总和与面积之比)等 3 个参数从数值角度表述地形复杂度, 地势起伏参数、高程标准偏差、单位面积等高线密度越大, 地形变化越复杂。单位面积等高线分布密度描述地形复杂程度有一定的局限性, 主要原因是等高线长度的计算不但与计算方法有关[ Gao, 1998]<sup>[12]</sup>, 而且和比例尺、DEM 分辨率有关。地势起伏参数和高程标准偏差又过分单一, 不能很好地刻画地形起伏。基于此, 文

中采用地势起伏参数、高程标准偏差和坡度分布频率表示地形的复杂程度。

图 5 是用不同高斯曲面参数(G1~ G6)模拟的同一区域曲面起伏状态, 表 1 为各个曲面的复杂程度描述参数, 图 6 是各曲面上的坡度分布频率。由曲面复杂度参数和坡度分布频率分布可知, G1 的曲面形态最简单, 具有较小的地势起伏( 20. 4 m)和较小的高程偏差( 3. 36 m), 坡度主要在 0°~ 8° 间( 70%), 曲面比较平坦; G2、G3 为中等复杂曲面, 坡

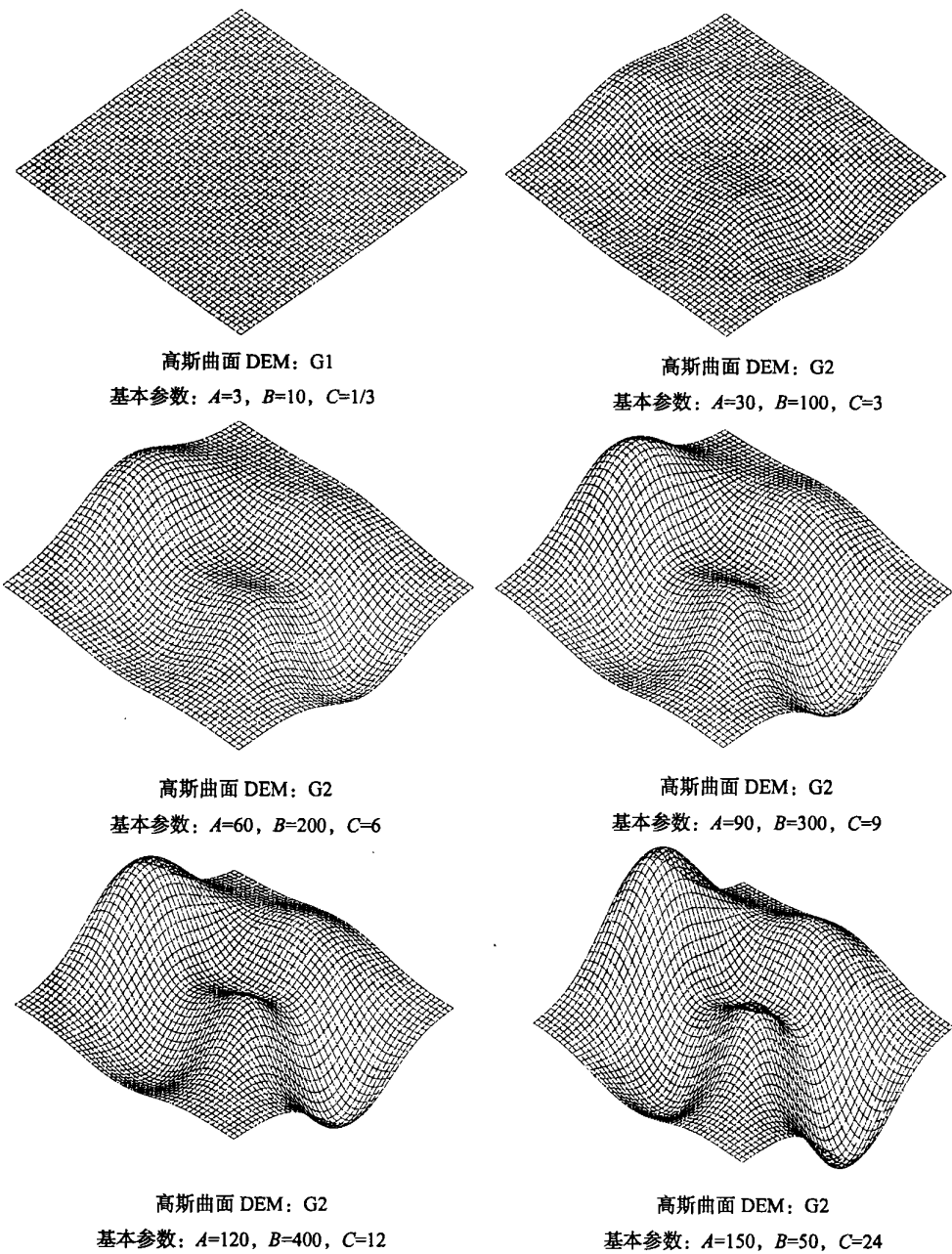


图 5 不同参数的高斯曲面 DEM

Fig. 5 Gauss surface of differ parameter

度以 3°~ 25° 为主, 曲面起伏较为平缓; 相较 G1、G2、G3 曲面而言, G4、G5、G6 曲面形态较为复杂, 其中以 G6 为甚, 其相对高度达 737.5 m, 高程偏差为 131.2 m, 这三种曲面坡度较陡, 主要分布在 25° 以上的区域。曲面复杂度参数显示, 从 G1 到 G6, 曲面形态逐渐由简单到复杂。

图 7 是各个曲面 DEM 的坡度、坡向误差的分级统计结果, 它揭示了如下规律: 在曲面单元内部 (分级坡度之间), 坡度、坡向中误差随着坡度的增加而减少, 而且坡向误差较坡度误差的提高幅度大 (这与上述坡度、坡向中误差随坡度变化规律一致, 当然分级坡度坡向中误差统计还与各个坡度区间的频率数有关); 在曲面单元之间, 随着曲面复杂程度由简单 (G1) 到复杂 (G6), 坡度、坡向误差也在逐步减少 (坡度中误差: 6.05°→4.53°→4.13°→3.72°→3.35°→3.03°; 坡向中误差: 95.6°→46.65°→29.35°→21.88°→17.54°→14.54°), 即地形变化越复杂, 坡度、坡向计算越准确, 同时上述数据也说明坡度、坡

向误差随着地形复杂程度的增加而逐渐趋于稳定, 如从 G1 到 G6, 当相对高度、高程标准偏差按 25% (表 1) 的幅度递增时, 坡度中误差的增幅分别为 -25%、-9%、-9%、-9%、-9%, 坡向中误差由 95.6 增加 14.54 的增幅分别为 -50%、-37%、-26%、-20%、-17%, 这也进一步说明坡度、坡向误差分布在平坦地区, 且坡向比坡度对地形复杂程度敏感。

表 1 高斯曲面 DEM 复杂度参数 (DEM 分辨率: 10 m)

Table 1 Complexity parameter of DEM for Gauss surface (DEM resolution: 10 m)

DEM 类型	平均坡度 (°)	曲面起伏 (m)	高程标准偏差 (m)
G1	6.277	20.4	3.36
G2	12.087	152.1	26.3
G3	20.523	298.5	52.4
G4	27.963	444.9	78.5
G5	34.193	591.3	104.7
G6	39.473	737.5	131.2

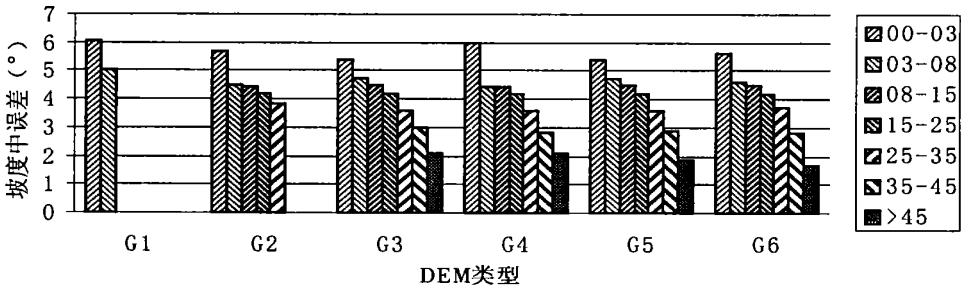


图 6 不同高斯曲面 DEM 坡度频率分布 (DEM 分辨率: 10 m)

Fig. 6 Distribution of DEM Gradient frequency for differ Gauss surface (DEM resolution: 10 m)

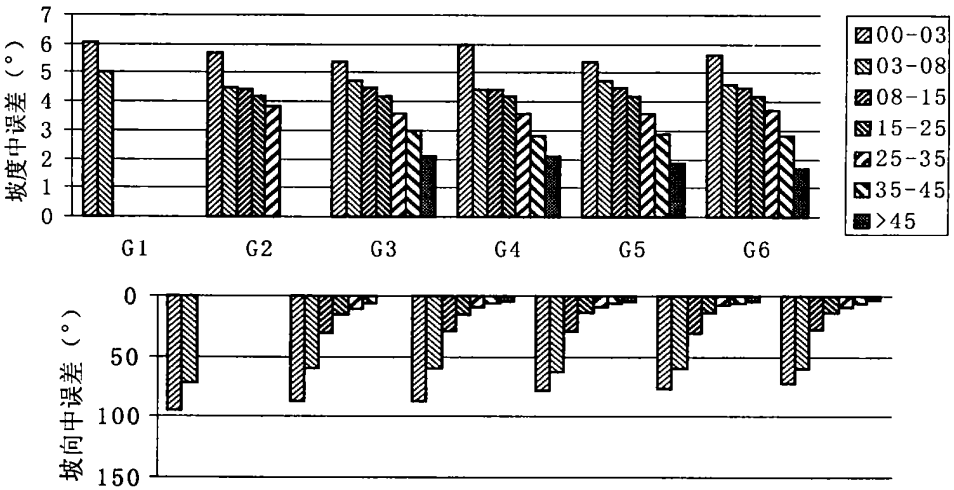


图 7 不同高斯曲面 DEM 坡度坡向误差统计分布 (DEM 分辨率: 10 m)

Fig. 7 Stat. distribution of DEM gradient and aspect error for differ Gauss surface (DEM resolution: 10 m)

### 3 结论

本文通过理论分析和实验验证探讨了地形复杂度和坡度坡向的关系, 澄清了目前关于坡度坡向和地形复杂度关系的矛盾观点。有如下结论: 1. 坡度、坡向误差与坡度值正向相关; 2. 坡向误差较坡度误差对 DEM 高程数据误差敏感, 较小的 DEM 误差引起较大的坡向误差; 3. 坡度、坡向误差主要分布在地形平坦地区, 并且随着地形复杂度的增加而减少。所获结论对地貌形态研究、水土流失监测等地学分析领域有一定的指导和实践意义。

### 参考文献(References):

- [1] Tang Guoan, Yang Qinke, Zhang Yong, *et al.* Research on accuracy of slope derived from DEMs of different map scales[J]. *Bulletin of Soil and Water Conversation*, 2001, **21**(1): 53~ 56. [汤国安, 张勇, 刘咏梅, 等. 不同比例尺 DEM 提取地面坡度研究[J]. 水土保持通报, 2001, **21**(1): 53~ 56.]
- [2] Liu Xuejun. On the accuracy of the algorithms for interpreting grid-based digital terrain model, PhD Thesis, Wuhan University. [刘学军. 基于规则格网数字高程模型解译算法误差分析与评价. 学位论文. 武汉: 武汉大学, 2002.]
- [3] Zhao Mudan, Chen Zhengjiang, Jin Rui. A Math-simulation on Accuracy of Gradient Extracted from DEMs[J]. *Bulletin of Soil and Water Conversation*, 2002, **22**(3): 55~ 57. [赵牡丹, 陈正江, 晋锐. DEM 提取地面平均坡度误差的量化模拟[J]. 水土保持通报, 2002, **22**(3): 55~ 57.]
- [4] Florinsky, I. V. Accuracy of local topographic variables derived from digital elevation models[J]. *INT. J. Geographical Infor-*

*mation Science*, 1998, **12**(1): 47~ 61.

- [5] Chang, K., Tsai, B. The effect of DEM resolution on slope and aspect mapping [J]. *Cartography and Geographic Information Systems*, 1991, 18: 69~ 77.
- [6] Carter, J. The effect of data precision on the calculation of slope and aspect using gridded DEMs[J]. *Cartographica*, 1992, **29**(1): 22~ 34.
- [7] Davis, F. W., Dozier, J. Information analysis of a spatial database for ecological land classification[J]. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 1990, 56: 605~ 613.
- [8] Band, L. E. Topographic partition of watershed with digital elevation models[J]. *Water Resources Research*, 1986, **22**(1): 15~ 24.
- [9] Desmet, P. J. J., Govers, G. Comparison of routing algorithms for digital elevation models and their implication for predicting ephemeral gullies[J]. *International Journal of Geographical Information science*, 1996, **10**(10): 311~ 331.
- [10] Skidmore, A. K. A comparison of techniques for the calculation of gradient and aspect from a gridded digital elevation model[J]. *International Journal of Geographical Information Systems*, 1989, 3: 323~ 334.
- [11] Mendicino G., Soil, A. The information content theory for the estimation of the topographic index distribution used in TOPMODEL[J]. *Hydrological Processes*, 1997, Vol. 11, 1099~ 1114.
- [12] Quinn, P. F., Beven, K., Chevallier, P., Planchon, O. The prediction of hillslope flow paths for distributed hydrological modelling using digital terrain models, In Beven, K. J. and Moore, I. D. eds, *Terrain analysis and Distributed Modelling in Hydrology*, John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1991, 63~ 83.
- [13] Gao, J. Impact of sampling intervals on the reliability of topographic variables mapped from grid DEMs at a micro-scale[J]. *International Journal of Geographical Information science*, 1998, **12**(8): 875~ 890.

## Influence of Terrain Complexity on Slope and Aspect

LI Tianwen<sup>1</sup>, LIU Xuejun<sup>2,3</sup>, TANG Guoan<sup>2</sup>

(1. Northwest University, Xi'an 710069 China; 2. Nanjing Normal University, Nanjing 210097 China;  
3. Changsha Communications University, Changsha, 410076, China)

**Abstract:** This paper adopt Three-factorial non-power difference arithmetic to study relationship of terrain complexity and gradient derived from Digital Elevation Model (DEM), Also, the currently misunderstanding on error spatial distribution of slope and aspect derived from DEM of concave half ellipsoid and Gauss synthetical surface is clarified. We get the following conclusions: 1. error of slope and aspect is positively correlated with the calculated slope; 2. error of aspect is more sensitive to DEM uncertainty than error of slope; 3. error of slope and aspect are typical for flat areas. The conclusions obtained from the study is also beneficial to practice work.

**Keywords:** Digital Elevation Model(DEM); terrain complexity; slope; aspect