19卷 5期 474~477页
2001年10月

山 地 学 报
JOURNAL OF MOUNTAIN SCIENCE

Vol. 19, No. 5 pp474~477
Oct., 2001

文章编号: 1008－2786(2001)05－0474－04

黄土高原分形沟网研究

雷会珠,武春龙
(中国科学院、水利部水土保持研究所, 陕西 杨凌 712100)

摘 要: 推测认为黄土高源沟网具有分形性。根据 Hoton 定律推导沟网分维计算式, 确定沟网分形结构, 分形理论求算得小流域沟网的分维 $D=1.9$ 接近于平面空间时的 $D=2$ 理论值。统计分析发现流域边界周长、长轴、短轴、长短轴比、汇合角等地貌指标随流域面积的变化。从而证明黄土高源流域的自相似性。

关键词: 黄土高原; 沟网; 分形
中图分类号: P931　　文献标识码: A

分形是非线性理论的一个前沿课题, 把组成部分以某种方式与整体相似的形体叫分形。自然界充满了自组织现象, 大量的客体具有统计自相似的属性。自然界中河流的主流具有分形构造, 分形维数 1.1~1.3 之间, 此仅应用于单个河流, 而不是作为整个的河网, 但其全部沟网是 $D=2$ 的空间填充河网的一些分形几何图式。客体组成的概率分布的非线性关系可作为自相似性的依据。我国学者对此已有过研究[1]。

关于沟网的分形研究最早起源于 Horton[2], 他引入了沟网分级的思想。后来 Strahler[3] 概化了 Horton 沟网分级图式以满足沟网的拓扑学性质。Strahler 分级系统至今广泛被学术界承认。Horton 重要的贡献是准确清楚的表述了河流数量和河长度的递变关系。不同条件下的大量研究证实沟网分枝率数值变化于 3~5 之间, 河长比数值变化于 1.5~3.5 之间[4]。Strahler 构造了沟网的随机拓扑模型, 从理论上证实了分枝率等于 4, 河长比率接近于 2。从此学术界坚信 Horton 的概念, 任何沟网遵守一定的规则并有序排列。分形对黄土高原独特的地貌形态适应性又该如何呢?

作者选择了陕北黄土高原丘陵沟壑区的纸坊沟流域, 将分形沟网在此流域作探索性的应用。

1 经验证据

分维描述源于研究海崖线长度的估算分维方法。此处将其应用于沟网。考虑某一线形状(如海崖线或河流), 应用长度为 r 的直尺一步一步地走, 测量其长度, 可挖认为线的长度 $L=N\times r$, N 是直尺的步数。令 $r\rightarrow 0$, 我们应该得到收敛的真实长度, 则

$$L=\lim_{r\rightarrow 0} N\times r \tag{1}$$

或

$$N\approx L_r^{-1} \tag{2}$$

然而, 发现上述极限常常并不收敛。问题是式(1)中 r 的指数为 1。令指数为一分数 D, 可获得独立于 r 的测量 F

$$F=N_r^D=const \tag{3}$$

式中 $D>1$。称 D 为分维。由上可知

$$N\sim r^{-D} \tag{4}$$

或等价于

$$L\sim r^{1-D} \tag{5}$$

(5)式表明在长度与直尺大小的双对数图上, 分维等于 1 斜率递减。

在应用步法程序于沟网时, 需要考虑分枝规则。这里我们测量的是每段沟的长度(据 Strahler 对沟网的分级定义)。在每段沟的端点, 一般剩余一段比 r 短的残段沟。若从最后一个步点端点的距离 $>1/2r$, 那么把它计入 N 中; 反之, 不计入 N 中。

(3)式可解释为: 长度 $>r$ 的河流数与 r^{-D} 成正比。对此的概率拟合是一双曲分布

$$Prob[\, length>l\,]\sim l^{-D} \tag{6}$$

式中 D 仍然是分维, l 是沟长度。双曲分布具有自相似要求的属性。

Horton 律的经常叙述, 特别是长度和分枝率, 是

收稿日期: 2001－02－14; 改回日期: 2001－06－29。
作者简介: 雷会珠(1964－), 女(汉族), 学士, 助理研究员, 主要从事土壤侵蚀与地理信息系统应用研究。

建立在 Strahler 的河网分极方案基础上的。源头河流定义为一级，当两个一级河流交汇变为二级，当两个相同级别河流相汇时成高一级的河流。当低级和高级河流相汇时，河流保持高级河流的级别。

Horton 律包括

$$R_b = N_{w-1} / N_w \tag{7}$$

$$R_1 = L_w / L_{w-1} \tag{8}$$

式中　N_w 是级别为 w 的河流数，L_w 是级别为 w 的平均河长，R_b 和 R_1 可通过 N_w 和 L_w 的对数与级别 w 相关图上的直线坡度求得。

上述 Horton 律是几何尺度化关系，因为它们并未涉及观察沟网的级别或分辨率。如果我们认为沟网是水的流路的话，有可能想象出，随着分辨率的不断增加，可得到越来越低级的河流，最终我们可看到草根间的水流，如此看来，极限沟网是具有 R_b 和 R_1 控制属性的分形。

令河网级别为 Ω，主沟长度为 L_Ω。那么，应用 Horton 长度很，级别 w 的平均沟长（$w < \Omega$）为 $L_\Omega / (R_1)^{\Omega - w}$。

根据 Horton 分枝律，w 级河流的数量为 $(R_b)^{\Omega-w}$，因此 w 级河流总长是 $L_\Omega (R_b / R_l)^{\Omega-w}$。

对所有 w 求和可得沟网总长度 L

$$L = L_\Omega [1 - (R_b / R_l)^\Omega] / [1 - (R_b / R_l)] \tag{9}$$

若 $R_b / R_l < 1$，当 Ω 趋于无穷时，级数收敛于有限长度 L，我们有 $D = 1$，注意这是一极限过程，其中 L_Ω 保持恒定，Ω 增大作为分辨率细化。然而，经常是 $R_b / R_l \geq 1$，级数发散。对很大的 Ω，我们可得到

$$L \sim (R_b / R_l)^{\Omega - 1} \tag{10}$$

第一级河流平均长度

$$S = (1 / R_l)^{\Omega - 1} \tag{11}$$

此可作为测量河网长度的分辨率。由(11)式可得

$$\Omega - 1 = -(\log s / \log R_l) \tag{12}$$

将式(12)代入式(10)得

$$l \sim s^{1 - (\frac{\log R_b}{\log R_l})} \tag{13}$$

与式(5)比较，

$$D = \log R_b / \log R_l 。 \tag{14}$$

任意河网 Horton 分枝律和河长律成立。有 w 级沟数量为 $R_b^{\Omega - w}$，长度为 $L_\Omega / R_2^{\Omega - w}$ 此超过长度 $l = l_\Omega / R_l^k$ 的沟总数量为

$$\sum_{i=0}^{k} R_b^i = (R_b^{k+1} - 1) / (R_b - 1) \tag{15}$$

式中　$K = \log(L_\Omega / l) / \log R_l$。

若沟总数量是 N_T，可得

$$Prob(length \geq l) = [(R_b^{k+1}) / (R_b - 1)] / N_r \tag{16}$$

当 k 很大时，R_b^{k+1} 远大于 1，故有

$$Prob(length \geq l) \sim l^{-(\log R_b)/\log R_l)} \tag{17}$$

比较式(17)与式(16)，同理可得式(14)。

纸坊沟 $R_b = 4.1$，$R_l = 2.1$。据(14)计算，分维 $D = 1.9$，近似等于 2，此结果表明纸坊沟沟网具有自相似性且是分维接近 2 的平面空间填充。

2　研究结果验证

2.1　沟网测量

研究流域选择在黄土高原丘陵沟壑区纸坊沟流域，其面积为 8 km^2，可代表典型黄土高原丘陵沟壑区的地貌景观，沟网密集发育，是探讨沟网自然属性的理想样本。

依据 1：5 000 比例尺地形图，提取沟网图式。圈定沟网各结点的集水区边界。用 ARC—INFO 系统量算，计量指标如下：

集水区面积：对每个沟网结点其对应一集水区面积。

集水区周长：对每个集水区，有一个确定的几何形状，测量其周界长度。

集水区长轴：每个沟网结点实际上是流域的出口，以流域出口上溯到流域边界最远点，连结最远点与出口所得直线即为集水区长轴。

集水区短轴：以集水区长为参照，作平行于它的直线，分别向集水区两边界移动，当与集水区边界交切时，分别从这两点向集水区长做垂线，其两个垂线段距离长的和，即为集水区短轴。

集水区汇合角：两边界切点与流域出口边线所夹的角，即为集水区汇合角。

2.2　流域周长与面积的关系

图 1 是纸坊沟流域 8 km^2 空间尺度范围内，集水区周长与面积的关系。显示随着面积尺度的增长，周长依幂律增长，幂律模拟方程为

$$Y = 5.1336 X^{0.4901}, \qquad R^2 = 0.958, N = 276$$

式中　Y 为集水区周长，X 为集水区面积。幂律指数为 0.4901，约等于 0.5。集水区周长与面积的幂律关系表明流域边界形状具有相似性，其特性随空间尺度的变化具有恒定性。

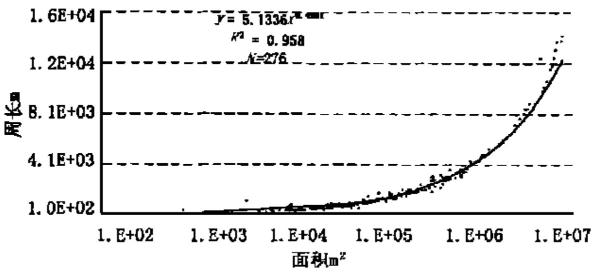

图 1 纸坊沟流域周长与面积的关系

The relationship between circumference and area in Zhifeng Gully watershed

2.3 长轴和短轴与流域面积的关系

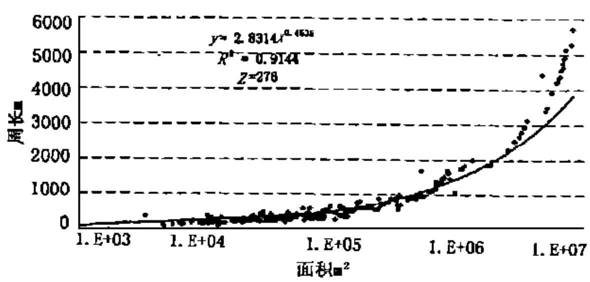

图 2 纸坊沟流域长轴与面积的关系

The relationship between length and area in Zhifang Gully watershed

图2 是纸坊沟流域不同空间尺度集水区长轴的变化, 幂律模拟方程为

$$Y=2.8314X^{0.4535},\quad R^2=0.9114, N=276$$

图3 是短轴随集水面积的变化。幂律模拟方程为

$$Y=1.1271X^{0.496},\quad R^2=0.8878, N=276$$

结果表明不同集水区面积的长轴与短轴是相似的, 随面积的变化依据恒定的规律。

2.4 长短轴比与面积的关系

图4 是纸坊沟流域长短轴比与面积的关系。幂律模拟方程为

$$Y_1=36.388X^{0.049}, R^2=0.0551,$$

$$N=276,\ \alpha=0.001$$

置信水平显著不相关。说明随空间尺度的增长模拟不符合幂律关系。线性模拟结果为

$$Y_2=-2E-0.8X+0.6798,$$

不显著相关。但发现线性关系式模拟表明长宽比的均值在0.6~0.7 水平上。

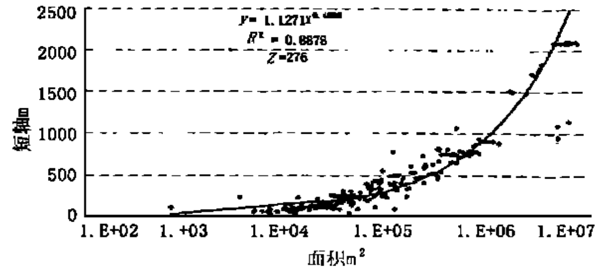

图 3 纸坊沟流域短轴与流域面积的关系

The realtionship between width and area in Zhifang Gully watership

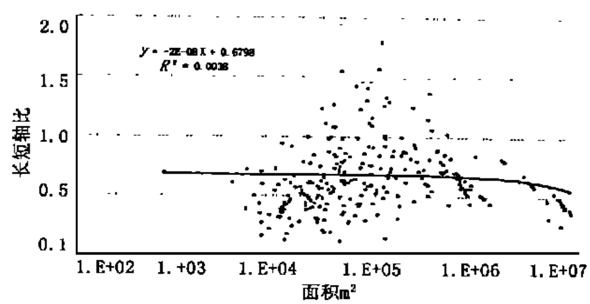

图 4 纸坊沟流域长短轴比与面积的关系

The relationship between length-width and area in Zhifang Gully watershed

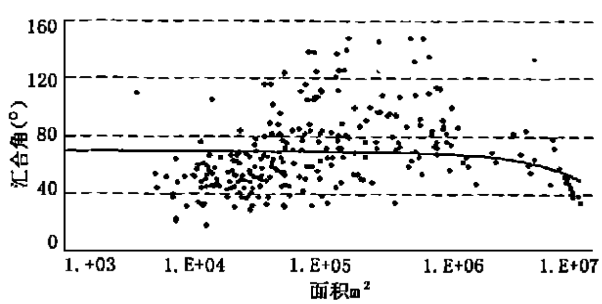

图 5 纸坊沟流域汇合角与面积的关系

The relationship beteen confluence of two tribntaries and area in Zhifang Gully watershed

2.5 汇合角与流域面积的关系

图5 是汇合角与面积的关系, 从散点图上知汇合角变化于 30°~140°的范围内, 依据最优化沟网理论框架, 模拟的能耗最小汇合角变化于 30°~140°, 依据最优化沟网理论框架, 模拟的能耗最小汇合角变化于π/4~3π/4 之间。纸坊沟的经验数据汇合角平均为 70°。可认为此汇合角随面积变化的数据为最优化沟网提供事实佐证, 当汇合角较小时网络的发展受到限制, 相对较大的张角(>3π/4)时, 可能会

出现数个明显的沟网发展到接近出口, 自然沟网的发育优势趋向占据张角为 110°的扇形区域。

3 结 论

分形的研究已经在各个学科领域得到广泛的应用[5,6], 分形性适应黄土高原丘陵沟壑区小流域范围内。根据沟网的 Horton 定律推导出沟网的分维计算式, 据此可进行沟网的分维计算, 判断流域沟网的发育程度。纸坊沟流域沟网的分维 $D=1.9$, 说明沟网接近频空间填充, 沟网强烈发育。

纸坊沟流域集水区周长、长轴和短轴随面积尺度的幂律变化律说明, 在 $<8\ km^2$ 流域的尺度内, 流域边界形状呈自相似性。长短轴比和汇合角的定值性也是证明流域形状自相似性的依据。对黄土高原丘陵沟壑区地貌形态模拟, 对流域形态发育预测有重要的理论价值。

在水土保持工作中有实际的指导意义。在黄土高原水土流失的治理中, 不但要搞清流域的地貌形态, 还要搞清流域的形状, 流域边界的周长、沟长、沟宽、流域的面积等以及它们之间的关系。

参考文献:

[1] 朱晓华, 王建. 山系的分维及山系与断层系的关系[J]. 山地学报(原《山地研究》), 1998, 16(2): 94~98.

[2] Horton, R. E., Erosional development of streams and their drainage basins: hydrophysical approach to quantiative morphology. Geol. soc. Amer. Bull. Vol. 56, P. 275~370, 1945.

[3] Strahler, A. E., Quantitative analysis of watershed geomorphology. Trans. Amer. geophys union. vol. 38, No. 6, p. 913~920, 1957.

[4] Sherve, R. L., Statistical law of stream numbers, J, Geol., 74, 7~37. 1966.

[5] 黄震方, 朱晓华. 分形论, 界壳论与山地研究理论及地理学创新与发展[J]. 山地学报, 2001, 19(1): 92~96.

[6] 王协康, 方铎. 流域地貌系统定量研究的新指标[J] 山地学报(原《山地研究》), 1998, 16(1): 8~12.

Fractal Channel Networks on Loess Plateau

LEI Hui-zhu and WU Chun-Long

(*Institute of Soil and Water Conservation, Chinese Academy of Sciences and Ministry of Water Resources, Yangling, Shaanxi Province,* 712100 *PRC*)

Abstrace: There has been speculation that river networks are fractals on Loess Plateau. The fractal dimension of networks, d, is derived here from the Horton' s lows of network composition. We analyses that channel networks determine their fractal structure and find that the networks as a whole, although composed of nearly members, is practically space filling with fractal dimension near 2. Statistical analyese find empirical relationships of geometric target. It is turn out that self-similarity of river drainage basins is characterized by self-similar dimension on Loess Plateau.

Key words: loess plateau; channel networks; fractal