

文章编号: 1008—2786(2000)01—0042—05

几种边坡可靠性数学模型的对比

罗文强^{1, 2}, 黄润秋¹, 张倬元¹, 王士天¹

(1. 成都理工学院工程地质研究所, 四川 成都 610059; 2. 中国地质大学数理系, 湖北 武汉 430074)

摘 要: 介绍了边坡可靠性分析中蒙特卡洛模拟、矩估计和函数连分式模型的基本原理。对这三种模型的背景、适宜条件、精度及实现的难易程度进行了对比研究, 并将它们应用于同一实例, 其结果有一定的变化。

关键词: 边坡可靠性; 数学模型; 对比研究

中图分类号: P642. 2; O221. 6

文献标识码: A

可靠性理论可有效地解决岩土体内客观存在的不确定问题, 因而, 逐渐受到岩土工程界的重视, 并开始应用于岩土工程、边坡工程及滑坡灾害评价治理之中。在边坡可靠性分析中, 尽管已经取得许多重要的研究成果, 但仍然存在许多问题, 离实际应用还有很大距离, 应用程度落后于结构工程。其中一个重要问题是部分可靠性模型失真, 导致计算结果与地质原型存在一定的差异, 实际应用中有一定的局限性。所以加强边坡可靠性模型精度及适宜性研究是边坡可靠分析的核心问题之一^[1]。本文就边坡可靠性分析的蒙特卡洛模拟模型、矩估计模型、及函数连分式模型, 利用同一实例对模型适宜性及精度进行对比研究, 其结论是模型适用条件及实现的难易程度是不一样的, 计算结果与模型不同有一定的变化。

1 基本原理

1.1 蒙特卡洛模拟

设安全系数

$$Z = F(x_1, x_2, \dots, x_m) = R(x_1, x_2, \dots, x_m) / S(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (1)$$

为状态函数, R 为抗滑力, S 为下滑力, x_1, x_2, \dots, x_m 为容重、粘聚力、摩擦系数、孔隙水压力、荷载强度、降雨强度等随机变量。它们具有一定的分布(大多服从正态分布和对数正态分布), 其统计值为已知。随机地抽取一组样本值 x_1, x_2, \dots, x_m , 由(1)式求得一个安全系数的随机样本值 Z' 。如此重复 N 次, 直至达到预期精度, 得到 N 个相对独立的安全系数样本 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 。安全系数所表征的极限状态为 $Z = 1$, 设在 N 次试验中, $Z \leq 1$ 的次数为 M , 则斜坡的破坏概率为 $P_f = M/N$ 。由 $P_f = 1 - \Phi(\beta)$ 可求出

边坡的可靠指标, 其中 $\Phi(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ 。

1.2 矩估计模型

在状态变量 $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 的分布函数未知的情况下, 无需考虑其变化形态, 只在区间 $(x_{\min},$

收稿日期: 1999—09—23; 改回日期: 1999—10—19

基金项目: 地质灾害防治基金、地质环境保护国家实验室开放基金及国家杰出青年自然科学基金(49525204)联合资助

作者简介: 罗文强(1963—), 男(汉族), 湖北襄樊人, 博士, 副教授, 现在成都理工学院工程地质研究所做博士后研究。主要从事应用数学、工程地质、环境地质的教学和研究工作。已发表论文 20 余篇, 获省部级科技奖

x_{\max}) 上分别对称地选择 2 个点, 例如通常取均值的 μ_{x_i} 正负一个标 σ_{x_i} 准差, 即: $x_{i1} = \mu_{x_i} + \sigma_{x_i}$, $x_{i2} = \mu_{x_i} - \sigma_{x_i}$ 。对于 m 个状态变量, 可有 $2m$ 个取值点, 取值点的所有可能组合则有个 2^m 。在 2^m 个组合下, 可根据状态方程求得 2^m 个状态函数值 Z , 即 2^m 个安全系数。 Z 的均值和方差分别为

$$\mu_z = \sum_{j=1}^{2^m} P_j Z_j, \quad \sigma_z^2 = \sum_{j=1}^{2^m} P_j Z_j^2 - \mu_z^2$$

式中 $P_j = \frac{1}{2^m} (1 + e_1 e_2 \rho_{12} + \dots + e_{m-1} e_m \rho_{(m-1)m})$; $e_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 取值为: 当 x_i 取 x_{i1} 时, $e_i = 1$; 当 x_i 取 x_{i2} 时, $e_i = -1$ 。 $\rho_{(i-1)i}$ 为状态变量 x_{i-1} 与 x_i 之间的相关系数。

求出状态函数的 μ_z 和 σ_z^2 后, 得到斜坡的可靠性指标和破坏概率为

$$\beta = \frac{\mu_z - 1}{\sigma_z}, \quad P_f = 1 - \Phi(\beta) \tag{2}$$

2.3 函数连分式模型

表达式
$$\Phi(x) = U_0 + \frac{X - X_0}{U_1 + \frac{X - X_1}{U_2 + \dots + \frac{X - X_{i-1}}{U_i}}}$$

称为函数连分式, 它具有很强的计算功能。由可靠性分析理论, 状态函数的均值和方差为

$$\begin{cases} \mu_z = F(\bar{X}) \\ \sigma_z^2 = \nabla G^T \text{cov}(X) \nabla G \end{cases} \tag{3}$$

式中 $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ 为随机向量; x_1, x_2, \dots, x_m 为状态变量; $F(X)$ 是状态函数; $\nabla G^T = (\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_m}) \Big|_{X=\bar{X}}$, $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)$ 为随机向量的均值向量; $\text{cov}(X)$ 为随机变量 x_1, x_2, \dots, x_m 的协方差阵。斜坡的可靠指标和破坏概率同(2)式。

由于均值向量和协方差阵是容易计算的统计量, 因此计算斜坡可靠指标和破坏概率的主要困难是状态函数偏导数 ∇G^T 。利用函数连分式方法可容易计算状态函数的偏导数 ∇G^T , 具体步骤见文献[2]。

3 对比研究

3.1 模型的起源

蒙特卡洛模拟法是一种依据统计抽样理论, 利用计算机研究随机变量的数值方法, 最早起源于蒲丰投针问题, 距今已有上百年历史。直到本世纪四十年代计算机出现后, 同时处理的问题日以复杂, 传统的解析解不能很好地处理, 模拟方法随之快速地发展。现行的蒙特卡洛模拟法是 Von Neuman 和 Ulam 在二次大战期间创建的, 尔后广泛地应用许多领域中。矩估计方法是在变量分布未知时, 通过各变量的均值和方差, 计算状态函数的均值和方差, 从而求出边坡的破坏概率和可靠指标。这种方法是基于 Han 和 Shapiro(1967), Rousenblueth(1975) 提出的统计矩方法^[3]。

函数连分式方法是用函数连分式作工具对复杂函数(包括隐函数、离散数据等)进行有效的拟合, 这种方法精度高, 样本少, 非常适用于离散数据和隐函数导数、积分、极值的计算, 是一种新的数值方法。由中国科学院邹海研究员于 1984 年创建的, 其在工程中的应用还不多见^[2]。

3.2 模型的适宜性、实现的难易程度和精度

蒙特卡洛模拟方法不受分析条件的限制, 不管极限状态函数是否线性, 也不管变量分布是否服从正态分布, 都可以简明地模拟出边坡系统的主要状态和特征。只要模拟的次数足够多, 就能够得到一个相对精确的破坏概率、可靠指标。因此, 蒙特卡洛模拟方法相对精度较高, 方法简单容易实现。主要问题

是模拟计算次数太多,特别是破坏概率较小时,运算量大,收敛速度慢。

矩估计方法适应于状态函数中各状态变量已知和未知的情况,利用状态变量的均值和方差,假定状态函数分布已知(通常假定为正态分布),通过计算状态函数的一阶矩及二阶矩求出破坏概率和可靠指标。此种方法计算简单方便,但相对精度较低,可满足于一般边坡工程的评价。结构工程正尝试改进矩估计方法,以提高计算精度^[4]。

引入函数连分式方法主要目的是解决状态函数的隐式形式和非线性状态。状态函数如果采用抗滑力和下滑力的线性组合形式,计算相对简单,但是不能够与“经验丰富”的安全系数相结合。相反,如果采用安全系数作为状态函数,则可以很好地利用安全系数在长期工程实践中积累的经验,易于广大工程人员所接受,关键问题是如何计算安全系数(如普遍采用的 Morsten—Price 方法、Spence 方法、毕肖普方法、和不平衡推力法等)中呈隐式变量的导数 ∇G^T , 函数连分式法可很好地解决这个问题^[3]。因此,函数连分式方法适用于较为复杂的边坡系统,且能和传统的安全系数相互结合,相互补充,其结果更切合实际情况。

3.3 研究实例

3.3.1 滑坡概况 岩村滑坡位于四川盆地某城市中心,地处长江和嘉陵江交会处。该区属于亚热带气候,温暖潮湿,平均年降雨量>1 200 mm,并常有暴雨。滑坡区基岩地质构造属川东隔档式褶皱带中一复向斜内部,岩层产状平缓,无明显断裂构造。基岩地层为侏罗系(J2S)泥岩、砂岩互层。相对坚硬的砂岩组成了滑坡区的上部平台,泥岩及崩积物组成斜坡主体。崩积物(Q4^{COL})主要由砂岩块石和泥岩风化粘土组成。人工堆石为在砂岩体中开挖地下洞室而堆弃后部的基岩大块石,下伏基岩相对不透水。该区新构造活动不强烈,属受活断裂包围的稳定地块,地震裂度为 VI 度。滑坡主滑方向为 NW,后缘一系列 NE—SW 方向拉张裂缝,居民建筑物受到严重影响。滑坡性质为:上部大量废弃土石加载造成推移式土质滑坡。滑动面为松散层与基岩接触面上。滑坡处于蠕滑阶段,降雨时,位移明显增大。

3.3.2 计算模型 图 1 是滑坡的计算剖面和分条受力模型。设状态函数为安全系数,由不平衡推力法计算边坡的安全系数,即

$$E_i = W_i \sin \alpha_i + Q_i \cos \alpha_i + \frac{1}{F} [(W_i \cos \alpha_i - U_i - Q_i \sin \alpha_i) \tan \varphi_i - c_i l_i] + E_{i-1} \Psi_i \tag{4}$$

式中 $\Psi_i = \cos \Delta \alpha_i + \tan \varphi_i \sin \Delta \alpha_i$, $\Delta \alpha_i = \alpha_{i-1} - \alpha_i$, E_i , E_{i-1} 为分条界面上推力,其作用方向假定与界面相邻的分条滑面平行。 W_i 为分条的自重, Q_i 所有水平合力(不包括条块相互作用力, $Q_i = P_{i-1} - P_i$, P_i 为水平水压力), U_i 为扬压力, l_i 为条块长度, α_i 为条块与水平线的夹角。抗剪强度参数 c , φ 为随机变量,其它变量为常量。即状态函数 $Z = F(c, \varphi)$ 是 c , φ 的隐函数。

3.3.3 研究实例计算结果 据实验结果分析, c , φ 是服从正态分布的随机变量,其均值和均方差分别为: $\mu_c = 18.01 \text{ KPa}$, $\mu_\varphi = 15.90^\circ$; $\sigma_c = 12.76 \text{ KPa}$, $\sigma_\varphi = 4.36^\circ$ 。其它量为常数,具体数值见文献^[5],对应于三种模型的计算结果列于表 1。由表 1,三种模型的中值安全系数(稳定系数)相同,矩估计破坏概率稍大,函数连分式次之,蒙特卡洛模拟稍小,结果基本相近,说明评价比较客观。表 1 不仅给出了安全系数,同时给出了破坏概率、可靠指标。表中结果显示,该滑坡稳定性处于极限状态,但破坏概率较高,需要工程治理。

4 结 论

1. 蒙特卡洛模拟法、矩估计法、函数连分式法三种模型进行边坡稳定性概率评价其条件的适宜性、实现的难易程度和精度是有差别的。

2. 三种模型应用于同一实例进行计算,其结果

表 1 三种模型计算结果对比

Table. 1 Contrast results of three kinds of model

模 型	结 果		
	β	$P_f(\%)$	中值安全系数
蒙特卡洛模拟方法	0.043	48.01	1.0095
矩估计方法	0.027	49.0	1.0095
函数连分式方法	0.0319	48.8	1.0095

有些差异, 但基本相同, 说明评价是较客观的。

3. 可进一步建立边坡安全系数与破坏概率(可靠指标)的二元联合评价指标体系。

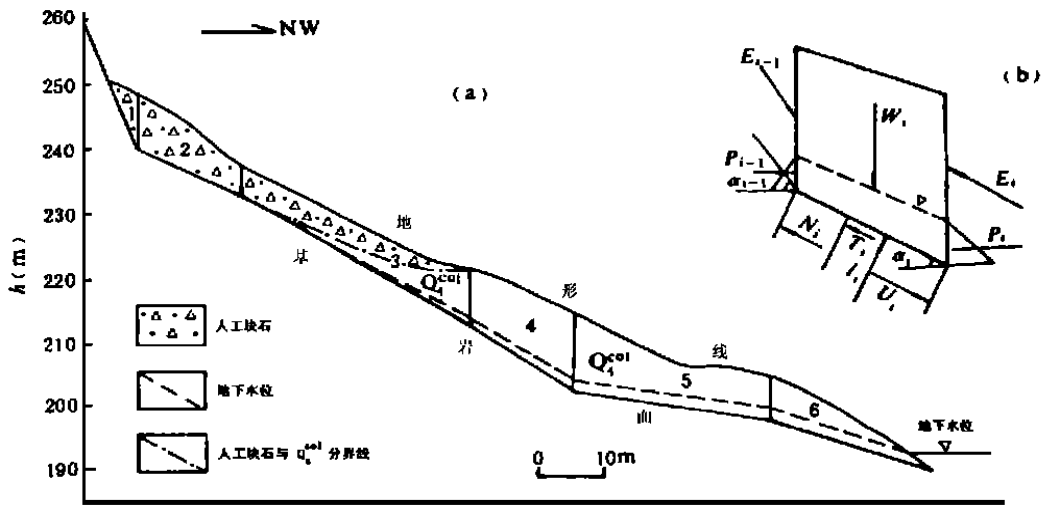


图 1 计算剖面条分图(a)和条块受力示意图(b)
Fig. 1 Profile for calculation (a) and model of forces on slice (b)

参考文献:

[1] 祝玉学. 露天矿边坡工程技术的进展、困难和希望[C]. 见: 第四届全国工程地质大会论文集(三). 中国地质学会工程地质专业委员会编. 北京: 海洋出版社 1992. 1113~1124

[2] 罗文强, 晏同珍. 函数连分式渐进法在斜坡稳定性概率评价中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 1999, 18(3): 300~302

[3] J. N. 希尔. 陈立周, 夏曼苹, 路鹏, 等译. 工程概率设计[M]. 北京: 科学出版社, 1989, 206~215

[4] 佟晓利, 赵国藩. 改进的 Rosenblueth 方法及其在结构可靠度分析中的应用[J]. 大连理工大学学报, 1997, 37(3): 316~321

[5] 罗文强. 斜坡稳定性概率理论和方法研究[D]. 中国地质大学博士学位论文, 1997, 13~17

CONTRAST OF SOME MATHEMATICAL MODEL OF SLOPE RELIABILITY

LUO Wen-qiang^{1,2}, HUANG Run-qiu¹, ZHANG Zhuo-yuan¹, WANG Shi-tian¹
(1. Institute of Engineering Geology, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059;
2. Deparement Mathematics and Physics, China University of Geosciences, Wuhan 430074)

Abstract: In reliability analysis of slope, partial incorrect models of reliability analysis led to difference between actual conditions and results of calculation, and produced a certain limitation in practical application. It is one of important problems to enhance research on

suitable conditions and precision of mathematical model in reliability analysis of slope. Basic principle of Montecarlo simulation, moment estimation and continued fraction in slope reliability analysis were introduced in this paper. We made contrast research on background, suitable conditions, precision and degree of difficulty for operation of these mathematical models. With three kinds of model, we calculated a example; the results showed that safety factor was identical and failure probability (reliability index) had a certain variation.

Key words: slope reliability, mathematical model, contrast research