

边坡稳定性分析的可靠度方法^{*}

林立相¹ 徐汉斌²

(1 中国科学院、水利部成都山地灾害与环境研究所 成都 610041;

2 四川省交通厅公路勘察规划设计院 成都 610041)

提 要 通过边坡破坏概率与安全系数的比较分析, 提出基于概率方法的可靠性分析的必要性; 同时从边坡可靠度指标 β 的几何定义出发, 建立马氏距离表达式, 并对其结果的可行性进行了验证。

关键词 边坡 可靠性 可靠度指标

分类号 《中图法》 P 642.22 **文献标识码** A

传统边坡稳定性分析多采用安全系数法, 该方法计算简便、直观, 广泛应用于边坡的分析和设计, 但其缺点是无法反映介质特性、孔隙水压力和荷载的不确定性^[1]。一方面, 具有相同安全系数值的不同边坡, 往往具有不同的危险程度^[2]; 另一方面, 对于给定的岩土试验数据和边坡资料, 安全系数需多大才表示实际意义上的安全或不安全? 忽视这些问题, 会误导出危险程度的判别结果, 或在边坡设计中加大大人为因素^[3]。因此, 考虑介质特性的不确定性、地下水压力的变动、模型误差和试验误差等, 合理的边坡稳定性分析是基于概率方法的可靠性分析。

可靠性分析是研究在诸多确定的和不确定的因素作用下系统的安全问题。近十多年来, 学者们将该方法应用于边坡系统的稳定性分析, 取得了显著成果, 这些成果的基本思想是假设边坡受控于多种因素 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$, 基于极限平衡理论的状态函数 $Z=g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为合理的条件下, 进行最小可靠度指标 β (最大失效概率)的确定, 其中 β 是针对边坡临界滑面而言。对于边坡系统诸多潜在滑面和整体破坏概率来说, 系统的可靠度要比临界滑面的可靠度大^[4]。加之状态函数 $g(x)$ 为确定性模型, 以此为基础的可靠性分析难免存在指标弱化和模型误差问题。对此, 本文将以 Hasofer-Lind 可靠度指标的几何方法进行边坡系统的稳定性分析。

1 边坡破坏概率与安全系数

如图 1, 按极限平衡理论, 边坡安全系数为

$$F = W \cos \alpha f + c / W \sin \alpha \quad (1)$$

式中 F 为安全系数, f 为滑面内摩擦系数, c 为滑面内聚力, L, α 分别为滑面长度和倾角, W 为边坡单宽质量。

边坡的状态是受多种因素控制的, 如土体容重 γ 、强度 c 和 f 、地下水压力 u 和外部荷载 q 等, 它们具有不确定性, 是随机变量, 以状态函数表达为

$$Z = g(x) = g(\gamma, c, f, u, q, \dots) \quad (2)$$

根据破坏概率定义有

$$P_f = Pr(g(x) < 0) = Pr\left(\frac{g(x) - \mu_g}{\sigma_g} < \frac{\mu_g}{\sigma_g}\right) = Pr(Z' < -\beta) = \Phi(-\beta) \quad (3)$$

式中 P_f 为边坡破坏概率, μ_g 为 $g(x)$ 的均值; σ_g 为 $g(x)$ 的方差; β 为可靠度指标; Φ 为准正态函数;

^{*} 四川省计委课题: 四川省滑坡灾害遥感调查。

收稿日期: 1998-11-20; 改回日期: 1999-02-03。

$Z' = g(x) - \mu_g / \sigma_g$ 。(3)式 Φ 是个累积函数, 即 P_f 与 β 属一一对应关系, β 的大小, 反映了边坡危险度大小, 而 β 的表达式, 是由状态函数 $g(x)$ 的构造方式决定的。以边坡抗滑力 R 和下滑力 S 表达的安全储备、安全系数和对数安全系数^[5], 构造 $g(x)$ 并由此得到 β 与边坡安全系数 F 的关系(表 1)。

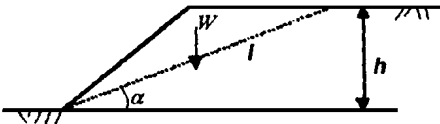


图 1 边坡分析示意图
Fig 1 Analytic diagram of slope

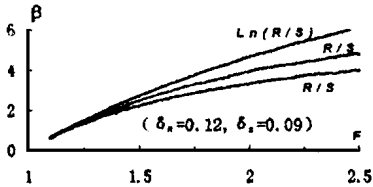


图 2 f 与 β 关系
fig. 2 f vs. β

从表 1 可以看出, $g(x)$ 的三种构造形式, 得到的是边坡可靠度指标 β 不同的表达式, 即对于给定不同的 δ_R 、 δ_S 和 F 值, β 是可变的。图 2 说明边坡可靠度指标与安全系数多值对应的关系, 尤其 $F > 1.2$

表 1 不同表达形式的 $g(x)$ 和 $\beta^{(1)}$

Fig 1 Different types of $g(x)$ and β

$g(x)$	β
$R - S$	$F - 1 / \sqrt{F^2 \delta_R^2 + \delta_S^2}$
R / S	$F - 1 / F \sqrt{\delta_R^2 + \delta_S^2}$
$\ln R / S$	$\ln F / \sqrt{\delta_R^2 + \delta_S^2}$

1) F —安全系数; δ_R 、 δ_S 分别为 R 、 S 的变异系数

表 2 破坏概率变化情况, $F = 1.14$ (据罗文强等 1996)

Table 2 Variation of failure probability with $F = 1.14$

σ_f	σ_c	δ_f	δ_c	β	P_f
0.016	96	0.030	0.24	0.964	0.16
0.05	96	0.095	0.24	0.914	0.18
0.085	96	0.160	0.24	0.832	0.21
0.05	156	0.095	0.39	0.583	0.28
0.05	40	0.095	0.10	1.778	0.04

时, β 的多值性质和 P_f 值的发散偏移越来越明显。表 2 给出的是图 1 边坡安全系数 $F = 1.14$ 时, 破坏概率 P_f 的变化范围。假定抗剪强度 c 、 f 为相对独立并服从标准正态分布的变量, F 为中值安全系数, σ_f 、 σ_c 和 δ_f 、 δ_c 分别为 f 、 c 的标准差和变异系数, 很明显, F 所表征的是边坡处于一定的稳定范围, 而非其危险状态。

自 70 年代以来, 尽管边坡安全系数在计算方法和精度方面, 已有了相当的普适性^[9], 但由于在假设条件和取值问题上的差异, 作为边坡危险程度的途径, 仍存在许多缺憾, 尤其将安全系数作为边坡工程设计标准时, 往往达不到令人满意的效果。而基于 F 的破坏概率方法^[7], 也无法克服分析模型误差所带来的缺点。

2 边坡可靠度指标的几何方法

通过以上 $g(x)$ 、 β 、 P_f 、 F 及其间关系的论述可以看出, 可靠度指标 β 代表的是边坡破坏概率 P_f , 即危险程度, 数学上将其定义为

$$\beta = \mu_g / \sigma_g \tag{4}$$

β 的求解, 多采用一次二阶矩法, 即将边坡状态函数 $g(x)$ 表达式按 Taylor 级数展开, 使其成为 x 的线性函数, 即保留一次项的近似方法, 该方法以确定性模型为算法基础, 难免存在可靠度指标表达方式的差异和分析模型的误差。

2.1 可靠度指标的几何解释

据 Hasofer & Lind(1974), 可靠度指标为随机变量均值点至破坏区域的距离^[8], 将随机变量的空间解释为如图 3 其中 μ_1 、 σ_1 和 μ_2 、 σ_2 分别为随机变量 X_1 、 X_2 的均值和标准差, 在 X 空间中

$$\beta = (R(\theta) / r(\theta)) \tag{5}$$

上式反映了随机变量 X 为斜交关系, 其性质由 σ_1 、 σ_2 决定。根据 Hasofer—Lind 可靠度指标的要求, 可

通过空间单位圆(球)方法,对 X 做正交变换,转换为正交空间 Y (图3),并满足

$$\mu_g(Y) = 0 \quad \sigma_g(Y) = 1, \quad \text{Cov}(g(Y)_i, g(Y)_j) = 0 \quad (6)$$

这样一来,将对 β 的确定转化到空间距离的求解上。

对于多变量的边坡问题,图3极限状态面可以认为是个超平面,通过 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow Y(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 正交变换,使得 y_1, y_2, \dots, y_n 具有零均值和相互独立的属性,此时, Y 空间原点到极限状态面切平面的最小距离即为可靠度指标设计值 β_d ,相应的边坡破坏概率设计值 P_{fail} 为:

$$P_{\text{fail}} = \Phi(-\beta_d) \quad (7)$$

2.2 可靠度指标与空间距离

关于这一点,已有文作过分析(Hasofer & Lind 1974; Parkinson, 1978)^[9],本文拟从距离定义出发,建立其与可靠度指标的关系。

2.2.1 几何空间的可靠度指标

图3 为了实现 X 空间 $\rightarrow Y$ 空间变换,引入

$$y_1 = (x_1 - \mu_1) / \sigma_1, \quad y_2 = (x_2 - \mu_2) / \sigma_2 \quad (8)$$

y_1, y_2 为互不相关的随机变量,假设极限状态面上存在一点 $Y(y_1, y_2)^*$,据(5)式,可靠度指标以距离表达为

$$\beta = \sqrt{y_1^{*2} + y_2^{*2}} = \sqrt{\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2} \quad (9)$$

不难看出,(9)式实际上为一中心位于 (μ_1, μ_2) 、长短轴分别为 $\beta \sigma_1, \beta \sigma_2$ 的椭圆。同样对有 m 个变量的边坡问题,(9)式可扩展为 m 维空间椭球体,这时边坡可靠度指标设计值 β_d 为

$$\beta_d = \min_k \left(\sum_{i=1}^m \left(\frac{x_{ik} - \mu_{ik}}{\sigma_{ik}} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (10)$$

由此也可以看出,在原始 m 维空间中, β_d 是以方差为单位的均值点至极限状态面的最小距离,如果做变换,使得 $\sigma_{ik} = 1$,就成为习惯上的距离。

2.2.2 变量相关的可靠度指标

(10)式代表了边坡分析和设计中,可靠度指标的普遍含义。在对 β_d 确定过程中, μ_i 和 σ_i 很容易从样本参数估计中获得,但 $x_i(i = 1, 2, \dots, m)$ 的获得需取决于状态函数 $g(x)$,若据此,问题就回到对 $g(x)$ 的极值或一次二阶矩法上来,而同一边坡, $g(x)$ 的构造形式可以有好几种,且计算过程也较为复杂。因此,有必要不到 $g(x)$ 上寻求 $(x_1, x_2, \dots, x_n)^*$ 点,使得 β_d 存在的问题上,而直接从样本方案上寻找与 β_d 相匹配的距离关系。

为此,引入马氏(Mahalanobis)距离概念^[10]:设有两个相同协方差矩阵的正态母体 $N(\mu_n, S_n), n = 1, 2$,变量 x_i 期望值分别为 μ_{i1}, μ_{i2} ;变量 x_j 期望值分别为 μ_{j1}, μ_{j2} ,则两个母体期望值间的距离为:

$$d_1 = \mu_{i1} - \mu_{i2} \quad d_2 = \mu_{j1} - \mu_{j2}$$

将两母体的马氏距离定义为

$$D^2 = \sum_{i,j=1}^m ds^{ij} d_j \quad (11)$$

式中 s^{ij} 为协方差矩阵 S 的逆矩阵 S^{-1} 的元素。(11)式给出的是两个正态母体变量相关时的距离,如果变量相互独立,则(11)式可简化为

$$D = \left(\sum_{i=1}^m \frac{d_i^2}{\sigma_i^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

很明显,(12)式与(10)式是相同的,(11)式实际上为变量相关时可靠度指标的表达式。因

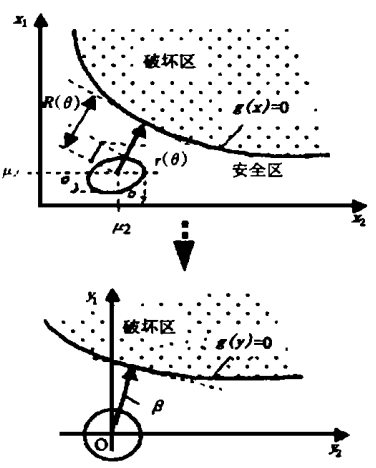


图3 可靠度指标的几何解释

Fig 3 Reliability index in spaces

此, 据数学原理^[19], 在未知 $g(x)$ 的期望值和方差的情况下, 采用样本参数估计值, 可靠度指标设计值 β_d 可表达为

$$\beta_d = \min_{x \in R} [(X - M_x)^T \cdot S^{-1} \cdot (X - M_x)]^{\frac{1}{2}} \tag{13}$$

(13) 式中 X 为基本变量矩阵; M_x 为基本变量均值阵; $(X - M_x)^T$ 为二者的转置矩阵; R 为表示基本变量点 X 所处的破坏区域. 并据变量 X_i 服从正态分布 $N(\mu_i, \sigma_i)$, 对 (13) 式作标准化变换, 有

$$\beta_d = \min_{x \in R} [(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i})^T \cdot R^{-1} \cdot (\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i})]^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

(14) 式中 R^{-1} 为基本变量相关系数阵的逆矩阵.

(14) 式是变量相关时基于 Hasofer—Lind 可靠度指标的马氏距离表达式; 可靠度指标设计值 β_d 由椭圆体距离方程 (9) 式确定, 即认为样本点大都落入破坏区域时, β_d 椭圆体中心至该区域边界的最小距离. 对于多变量的边坡问题, 变量间的相关是客观存在的; 而基本变量的试验值或反演值的选取, 也常于极限平衡状态下进行的; 尤其要指出的是, (14) 式不仅可反映所有影响边坡的因素的相关性; 也可反映变量的随机性, 加之计算较为简便, 因此有较广阔的应用前景.

3 实例研究

为了说明 (14) 式的实用性, 我们特以某县城边坡 (图 4) 进行验算, 该边坡位于昔格达组半成岩地层, 由于建筑开挖而产生滑动, 平均长 30m, 高 16m.

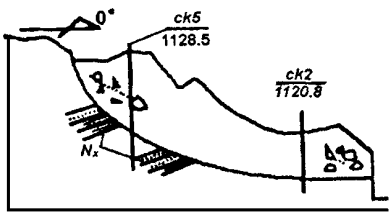
边坡数据是通过野外调查和室内试验获得的, 在此, 选取土体容重、内聚力、内摩擦系数、坡高和坡度为基本变量, 即 $X_i = (r \ c \ f \ h \ \alpha)^T$, 它们主要统计量为: $\mu_r = 17.845 \text{ kN/m}^3$, $\sigma_r = 2.69$, $\mu_c = 14.90 \text{ kPa}$, $\sigma_c = 3.765$, $\mu_f = 0.253$, $\sigma_f = 0.075$, $\mu_h = 15.79 \text{ m}$, $\sigma_h = 1.655$, $\mu_\alpha = 29.02^\circ$, $\sigma_\alpha = 3.389$.

计算过程以样本统计结果为基础数据, 通过 Vbasic 编写的程序模块 RESLP, 首先进行变量的主要统计量和相关系数矩阵 R 的计算, 再完成变量标准化和逆矩阵的运算, 最后完成对 β_d 的确定 (图 5).

计算结果是令人满意的, 该边坡最小可靠度指标 $\beta_d = 1.751$, 其破坏概率 $P_f = 0.04$. 从边坡概率设计要求角度 (即 $\beta_d > 3.0$, $P_f < 1.3 \times 10^{-3}$) 看, 其远离稳定状态, 具有较高的危险度. 当然, 计算结果的准确性还与基本变量的选择和参与的样本数量 (本文 $n = 20$) 有关. 同时, 上述模型的应用, 也为边坡工程设计提供一个启示, 即可选择适当的设计目标变量 (如推力 T , 构造物抗力 R 等), 参与设计计算, 以确定不同 β_d 标准下的目标变量值.

4 结 论

可靠性理论的发展和应用, 为边坡稳定性分析和设计提供了有效的工具. 近年来, 可靠度指标的建立和应用, 一直是研究的焦点, 各种成果中多以状态函数 $g(x)$ 为研究出发点的极值法或一次二阶矩法, 而 $g(x)$ 的误差是显而易见的. 本文以可靠度指标的几何定义为出发点, 建立多变量相关和独立时边坡可靠度指标的马氏距离表达式, 试图从分析模型精确、简洁, 计算方便的角度, 以影响边坡安全的各种因素为系统, 寻找其可靠度指标设计值, 即最大破坏概率. 通过实例分析, 结果较为合理, 而对其应用



ck5、ck2 为钻孔编号, 1128.5、1120.8 为孔口高程
图 4 某县城边坡剖面
Fig 4 Analytic slope profile

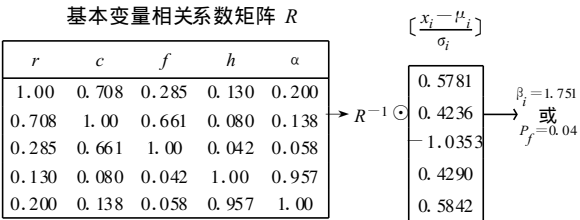


图 5 计算过程及主要结果展示图
Fig 5 Main results from RESLP module

于边坡工程设计方面的有效性问题,还有待进一步的工作。

参 考 文 献

- 1 R. N. Chowdhury, et al, Rational Polynomial Technique in Slope—Reliability Analysis *J. Geotech. Engrg.*, 1993, Vol. 119: 1910 ~ 1928
- 2 Li K. S. and Lump P., Probability Design of Slopes *Can. Geotech. J.*, 1987, Vol. 24: 520 ~ 535
- 3 Heog, K. and Murarka R. P., Probability Analysis and Design of a Retaining Wall, *J. Geotech. Div., ASCE*, 1974, Vol. 100: 349 ~ 365
- 4 Cornet C. A., First—order Uncertainty Analysis of Soil Deformation and Stability, *Proc., 1st Int. Conf. on Application of Statistics and Probability to Soil and Structure Engineering*, Hong Kong, 1974. 129 ~ 144
- 5 祝玉学. 边坡可靠性分析. 北京: 冶金工业出版社, 1993. 40 ~ 47
- 6 Li K. S. and White W., A Unified Solution Scheme for the General Procedure of Slices in Slope Stability Analysis. Research Report No. R—21, Dept. Civ. Engrg., University of New South Wales, Australia, 1987b
- 7 罗文强, 晏同珍. 斜坡稳定系数的概率分析. *地球科学*, 1996, Vol. 21: 653 ~ 655
- 8 Hasofer, A. M. and Lind N. C., Exact and Invariant Second-moment Code Format *J. Engrg. Mech. Div., ASCE*, 1974, Vol. 100: 111 ~ 121
- 9 Parkinson D. B. Solution for Second Moment Reliability Index, *J. Engrg. Mech. Div., ASCE*, 1978, Vol. 104: 1267 ~ 1275
- 10 於崇文. 数学地质的方法与应用. 北京: 冶金工业出版社, 1980. 117 ~ 126

作者简介 林立相, 33 岁, 助研, 从事区域滑坡危险度和边坡工程设计技术研究, 发表学术论文数篇。

RELIABILITY APPROACH TO THE ANALYSIS OF SLOPE STABILITY

LIN Li-xiang

(Institute of Mountain Hazards and Environment, Chinese Academy of Sciences
& Ministry of Water Conservancy, Chengdu 610041)

Abstract The stability analysis of slopes are commonly conducted by using factor of safety (Fos) methods. However, The Fos is far from a satisfactory risk measure. This paper presents an alternative approach using analytic techniques of reliability basing on probabilistic methods. The study focus is on the determination of Hasofer-Lind reliability index (H-L β) which actually reflects the risk degree of slopes. And the H-L β can be geometrically explained as a distance from the mean value of random variables to the limit failure surface in original space $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Based on this definition, a H-L β solution is progressively worked out in formulations of Mahalanobis distance for multivariate slope problems. The model is presented as follows:

$$\beta_d = \min_{x \in R} \left[\left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^T \cdot R^{-1} \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

It successfully displays the designed value of H-L β and could be respectively practiced to normally independent and correlated variables selected from slope systems. The processes of example analysis show more convenient in calculations and more acceptable in results than those of performance function $g(x)$ approaches.

Key Words Slopes, reliability, reliability index